

serie: competencias básicas

Notas de Razonamiento Matemático

Versión 1.1 - Agosto 2010

Alberto Lomelí
Marisela Castillo
Jorge Herrera
Felipe Ramírez
Enrique Comer

Instituto Tecnológico de Tijuana

Documento de apoyo para estudiantes y maestros del Semestre Cero o Propedéutico en el Instituto Tecnológico de Tijuana.

© Esta obra se publica bajo una licencia de Creative Commons (ver: <http://creativecommons.org/licenses/by-nc-nd/2.5/>). Básicamente, usted puede distribuir y comunicar públicamente la obra, siempre que se cumpla con (1) dar crédito al autor(es) de la obra, (2) no la utilice para fines comerciales y (3) no la altere, transforme o genere una obra derivada de ella. Además, al utilizar o distribuir la obra, debe especificar claramente los términos de esta licencia. Estas condiciones pueden modificarse con permiso escrito del autor(es).

Índice

1. Pensamiento Matemático	6
1.1. Cultura matemática	8
1.2. Competencias matemáticas	8
1.3. Fluidez y grado de dificultad de los problemas	9
1.4. Escritura y visualización matemática	9
1.4.1. Graficación	9
1.4.2. GeoGebra	10
2. Números Reales	13
2.1. Propiedades Básicas	14
2.2. Sintáxis y semántica	16
2.3. Sustitución algebraica	20
2.4. Conceptos matemáticos	22
2.4.1. Resta y división	22
2.4.2. Expresión algebraica y polinomios	22
2.4.3. Ecuaciones	23
2.4.4. Funciones	24
2.4.5. Valor absoluto	25
3. Álgebra	26
3.1. Operaciones algebraicas básicas	26
3.2. Factorización	30
3.3. Operaciones con Fracciones	32
3.4. Propiedades de la igualdad	34
3.5. Ecuaciones lineales	35
3.6. Ecuaciones cuadráticas	36
4. Representación gráfica de funciones	38
4.1. Función Lineal	38
4.1.1. Graficación de la función lineal	39
4.1.2. Dominio y Rango de la Función Lineal.	40
4.2. Función Cuadrática.	40
4.2.1. Dominio y Rango de la Función Cuadrática	43
4.3. Función Raíz.	43
4.3.1. Raíz Lineal	43
4.3.2. Función Raíz Cuadrática	44
4.3.3. Dominio y Rango de la Función Raíz	45
4.4. Función Racional.	46
4.4.1. Función Racional Lineal	46
4.4.2. Función Racional Cuadrática	47
4.4.3. Dominio y Rango de las funciones Racionales.	48
4.5. Función Logaritmo Natural	49
4.6. Función Exponencial	50
4.7. Funciones Trigonométricas.	50

5. Lógica y Razonamiento	52
5.1. Inferencia	52
5.2. Deducción	53
5.3. Comprobación o justificación	55
5.4. Estrategias de prueba o demostración	55
5.4.1. Directa	55
5.4.2. Contrapositiva	55
5.4.3. Análisis regresivo	55
5.4.4. Negación	56
5.4.5. Método exhaustivo	56
6. Resolución de Problemas	57
6.1. Diagramas y modelos	57
6.2. Movimiento lineal con velocidad constante	59
6.3. Mezclas	60
Referencias	63

Presentación para el maestro

El curso de Razonamiento Matemático viene a ser un elemento central en el desarrollo del programa de estudios, debido a la importancia de las matemáticas en las carreras de Ingeniería. Este curso se relaciona con los otros cursos de Competencias Básicas y se apoya fuertemente en ellos para lograr una formación integral en el individuo. Por ejemplo para los temas de Sintaxis y Funciones se apoya en Competencia Digital y para el desarrollo de evidencias y el Portafolio en Aprendizaje Autónomo. Se interactúa y se actualizan los contenidos de los cursos para ver si están cumpliendo la función integradora.

El curso está centrado en el aprendizaje por parte del alumno de los aspectos básicos de las matemáticas y un aspecto característico del curso es el de no tratar de "enseñar mucho", esto es: que el alumno aprenda unos cuantos conceptos básicos, pero que los domine y no que vea una cantidad extensa de temas sin dedicarle el tiempo suficiente para el análisis y la reflexión.

El alumno tiene muchos conocimientos previos, sin embargo muchos de ellos son aislados y a veces incoherentes. El principal objetivo del curso es una labor integradora de todo lo que ha aprendido en la Secundaria y Preparatoria, quizá desde Primaria.

Por ejemplo un porcentaje muy alto de alumnos tiene conocimientos como: (1). El orden de los factores no altera el producto, (2). Las leyes de los signos, (3). La (llamada) fórmula general y (4). La ley de la tortilla. Sin embargo muchos conocen sólo el nombre y no pueden utilizarlo, han estado acostumbrados a ver una fórmula o un procedimiento y a desarrollar 20 problemas iguales para reforzarlo. Este conocimiento puede ser útil si logra atarlo a algo que ya está dominado y que sea parte fundamental de su competencia y no sólo un conocimiento aislado.

El alumno cuando llega de preparatoria tiene la vaga idea de que hay alrededor de 40 ó 50 propiedades de álgebra que debe saber, pero no sabe cuáles y muchas no las sabe utilizar. Nuestro objetivo es que se aprenda unas cuantas bien y que cada conocimiento nuevo que vaya adquiriendo lo ate a las propiedades básicas que ya tiene para reforzar su competencia, esta competencia matemática se va desarrollando día a día con el reforzamiento y la práctica, la reflexión y la conexión de los conocimientos que se van estudiando.

Las principales universidades del mundo, declaran que un alumno necesita alrededor de 100 competencias para poder cursar un curso de Cálculo de Ingeniería. Por ejemplo la Universidad Simon Fraser de Canadá, recomienda 110 [4]. Lo ideal es que el alumno tenga estas competencias, pero en el Semestre Cero, nos vamos a enfocar a que aprenda unas cuantas, y lo más importante a que esté capacitado para poder ir aprendiendo (reforzando) o mejorando su dominio de las demás. Todo esto centrado en: sintaxis, álgebra de números reales, lógica, variación y funciones.

Específicamente nos enfocamos a doce competencias: dos con respecto a la actitud hacia las matemáticas, ocho de carácter algorítmico, una orientada a la argumentación lógica y una más, que viene a ser la culminación y la suma de toda la preparación matemática y que es la capacidad de enfrentar, plantear, analizar y resolver problemas.

Finalmente la forma de abordar los temas es en base al concepto de Fluidez, que consiste en mantener al alumno dentro de la zona que lo motiva a seguir mejorando su desempeño académico mediante retos acordes a sus capacidades, esto mediante actividades con ejercicios escalonados de acuerdo al grado de dificultad donde el alumno puede ir comprobando su nivel de dominio para cada competencia específica.

Presentación para el alumno

Durante toda su preparación escolar hasta el momento, ha llevado cursos de matemáticas. En Ingeniería es fundamental el conocimiento matemático y el presente curso es para reflexionar sobre los conocimientos adquiridos, para integrar los diferentes temas que se han aprendido y para subsanar los aspectos básicos que no se hayan aprendido bien.

Debemos entender que el presente curso no es para repasar o volver a ver los temas ya cubiertos en cursos de secundaria o preparatoria; es para darse cuenta de la importancia de tener el conocimiento estructurado, para conectar los conocimientos adquiridos con los fundamentos, y para reflexionar sobre los conceptos. Por lo tanto, cada uno de los temas y ejemplo que se cubran en el curso deberán integrarse a los conceptos básicos y formar de una manera sólida la competencia matemática que se va enriqueciendo día a día con el análisis, la reflexión y la conexión de las ideas.

Otro aspecto central en la preparación matemática es la habilidad para resolver problemas; de nada serviría tener una preparación muy sólida en conceptos matemáticos y ser muy eficiente en el desarrollo de procedimientos y algoritmos, si no se pudiera aplicar esto a la resolución de problemas. Debemos entender que un ingeniero debe enfrentar diariamente diversos retos y debe estar capacitado para poder resolver las diferentes situaciones que se le presenten, que nunca van a ser exactamente las mismas; por lo tanto, la Competencia Matemática tiene centrada su formación principalmente en la solución de problemas. Aquí se presentan diferentes puntos de vista de expertos en el tema y diversos modelos para que el estudiante vaya formando su propio esquema que a fin de cuentas le ayude a moldear su propia visión para enfrentar los retos diarios.

Como complemento además de lo anterior, se utilizan diversas herramientas que se complementan con la Competencia Digital y la de Aprendizaje Autónomo, que vienen a ser un apoyo muy importante para crear la atmósfera necesaria requerida para el aprendizaje. Entendiendo por Atmósfera: el aula, el maestro, los compañeros, la computadora, las redes sociales, los otros cursos y en el general el entorno que directa o indirectamente afecta la formación diaria de la Competencia Matemática.

Es importante finalmente que se entienda que la preparación matemática es fundamentalmente responsabilidad de cada aprendedor¹ y que el maestro y el curso solamente son un apoyo para brindar las condiciones óptimas en que se pueda construir el aprendizaje y desarrollar la competencia deseada, pero que sin la voluntad y el esfuerzo diario no se logra. Le deseamos mucho éxito en la construcción de la estructura matemática que le ayude a poder cursar con éxito su carrera y esperamos que este curso sea un apoyo para alcanzar sus objetivos en la vida.

1. Pensamiento Matemático

Pensar matemáticamente es un atributo cada vez más importante para los profesionales de todas las carreras. John Mason [3] nos presenta la necesidad de crear y mantener una atmósfera apropiada para desarrollarlo:

¹Utilizamos «aprendedor» ya que las palabras educando y estudiante no abarcan el carácter dinámico, la responsabilidad e intencionalidad de la empresa de aprender. Como referencia, ver el uso del término por el Prof. Robert J. Marzano en [2].

Ningún pensamiento ocurre en el vacío. La atmósfera cognitiva y emocional afecta tu pensamiento, estés consciente de ello o no. Para ser un pensador matemático efectivo necesitas confianza para intentar tus nuevas ideas y tratar sensiblemente con tus estados emocionales. La base de la confianza descansa en experimentar el poder de tu pensamiento para incrementar tu comprensión. Solamente la experiencia personal reflexiva, puede lograr esto².

Esta reflexión es precisamente la que se busca desarrollar en algunas de las estrategias actuales de aprendizaje basado en competencias (p. ej. el portafolio), como se verá en la sección 1.2.

La atmósfera requerida para desarrollar el pensamiento matemático requiere de tres procesos básicos: (1) indagación o cuestionamiento, (2) enfrentar desafíos y (3) reflexionar. La persona que se desarrolla intelectual y emocionalmente en dicha atmósfera, requiere una actitud de poder hacer³., una actitud que dice:

- *Puedo Cuestionar*: Identificar situaciones o problemas a investigar, identificar mis hipótesis, negociar el significado de los términos

- *Puedo aceptar desafíos*: hacer conjeturas, buscar argumentos que las justifiquen o las invaliden, revisar, modificar, alterar

- *Puedo reflexionar*: ser autocrítico, esperar y evaluar diferentes enfoques, hacer ajustes, re-negociar, cambiar de dirección

A diferencia de lo que se percibe en ocasiones al leer un libro de texto de matemáticas, donde a cada paso se avanza de manera segura y bien argumentada, la creación de las matemáticas y la solución de problemas propios de esta materia, no avanzan de manera secuencial y única, sino que lo hacen en base a exploraciones e intuiciones que posteriormente cristalizan en una solución elegante o al menos bien estructurada y justificada donde cada símbolo que se escribe contribuye directamente a la solución. Dichas intuiciones sólo se desarrollan con la interacción dedicada e intensional del aprendedor con los objetos y procesos matemáticos, desde los más sencillos y concretos, hasta los más complejos y abstractos.

²Ver [3] p. 152

³Ver [3] p. 153

COMPETENCIA DE LA UNIDAD

Adquiere el compromiso para desarrollar su Competencia Matemática y se integra a la atmósfera apropiada para el desarrollo del aprendizaje.

COMPETENCIAS ESPECÍFICAS

El alumno es responsable de su aprendizaje. Analiza y reflexiona sobre las competencias matemáticas que debe desarrollar. Describe, evalúa y selecciona los ambientes y las herramientas para realizar su aprendizaje (fluidez, GeoGebra, Portafolio, etc.)

ACTIVIDADES

Se resuelve un problema donde se pone en práctica los aspectos básicos de la Cultura Matemática.

Hacer una práctica en Geogebra.

Escribir en su sitio web las reflexiones de la semana.

EVALUACIÓN

Práctica de laboratorio: (En coordinación con el curso de Competencia Digital)

Creación de un sitio web: En Google/Site (o equivalente), se crea un sitio personal del curso.

Elaborar un ensayo: Qué espera del curso, cómo se relaciona este curso con otros y cómo puede utilizar los conocimientos de los otros cursos para mejorar su competencia matemática.

1.1. Cultura matemática

Actualmente disfrutamos de una gran riqueza matemática. Tanto las matemáticas llamadas puras (p. ej. teoría de números y álgebra abstracta) como las matemáticas aplicadas (p. ej. métodos numéricos, física-matemática) se han desarrollado gracias a una cultura propia que promueve sobre todo el descubrimiento de proposiciones verdaderas y su demostración. Alan J. Bishop [1] describe de manera sucinta, los componentes⁴ de dicha cultura. La siguiente Tabla enfatiza los valores de cada componente:

<i>Componente</i>	<i>valores</i>
simbólico	racionalidad y objetismo (reificación)
social	control (predicción) y progreso
cultural	apertura y misterio

Cuadro 1: Componentes de la cultura matemática y sus valores

1.2. Competencias matemáticas

Las competencias en Matemáticas son muy generales, y como se mencionó en la sección anterior a lo largo de la carrera se deben de ir adquiriendo y reforzando. Específicamente para el curso de cálculo se requieren conocimientos muy concretos; una buena referencia Web es "*Calculus Readiness Assessment Topics*" de la Universidad Simon Fraser de Canadá (más detalles en [4])

⁴ver [1] p.131

Para el curso del Semestre Cero se establecieron 12 competencias, con las cuales se cubren varias de las 110 que recomienda la SFU de Canadá y las demás el alumno podrá desarrollarlas o reforzarlas utilizando las habilidades que aquí se verán. A continuación se presentan las Competencias de Curso de Razonamiento Matemático.

El alumno que cursa el Semestre Cero:

1. Es responsable de su aprendizaje.
2. Está dispuesto a enfrentar retos matemáticos.
3. Utiliza (adecuada/ formalmente) los números reales.
4. Realiza operaciones con fracciones.
5. Factoriza expresiones algebraicas.
6. Utiliza adecuadamente la Sintaxis y Semántica de las expresiones.
7. Utiliza las propiedades de la igualdad para resolver ecuaciones.
8. Justifica sus procedimientos.
9. Conoce y aplica el Teorema de Pitágoras.
10. Conoce, relaciona y aplica el Círculo Trigonométrico.
11. Reconoce y realiza la Gráfica de funciones básicas.
12. Resuelve problemas de matemáticas.

Estas 12 competencias se van adquiriendo y reforzando mediante la práctica en cada uno de los temas del curso a través del semestre y sirven como base para poder adquirir la preparación necesaria en Matemáticas para ingresar al primer semestre de una carrera de Ingeniería.

1.3. Fluidez y grado de dificultad de los problemas

El desempeño y desarrollo intelectual dependen en gran medida del grado de dificultad de los problemas a que nos enfrentamos. Según propuso el Dr. Mihaly Csikszentmihalyi, existe una zona de fluidez en el cuadrante Capacidades .vs. Retos de forma tal que si una persona enfrenta regularmente retos a la medida de sus capacidades, entonces dicha persona tiene un mejor desarrollo y a la vez obtiene una mayor satisfacción, que una persona que se enfrenta a retos ya sea menores o mayores a sus capacidades. Este concepto aplicado al área de educación matemática ha sido estudiado por Gaye Williams [5]. Para mayor información recomendamos visitar la página de Aprendizaje, Fluir y Felicidad en el proyecto Cemati.org.

1.4. Escritura y visualización matemática

1.4.1. Graficación

Entendemos por graficar dentro del contexto de las matemáticas la acción de representar en el plano (dos dimensiones), o en el espacio (tres dimensiones) un conjunto de parejas o tripletas ordenadas de valores.

Estas representaciones en general obedecen a reglas que se definen con el concepto de función, mismo que se explica en temas posteriores.

En este punto lo que nos interesa es comprender el concepto de gráfica y por ende el de graficar.

Un ejemplo de una gráfica es una recta, que en su caso más simple corresponde ya sea a la recta horizontal $y = c$ o la recta vertical $x = c$.

¿Cómo podemos entonces entender lo mencionado anteriormente?

Para contestar esta pregunta podemos hacer uso de algunas herramientas de cómputo, que nos permiten visualizar lo que las expresiones anteriores significan.

En la siguiente sección presentamos una excelente herramienta que usaremos con frecuencia.

1.4.2. GeoGebra

GeoGebra [6] es un software matemático que nos ayuda a obtener entre otras cosas, gráficas de funciones. Lo primero que tenemos que hacer es *instalarlo* en nuestra computadora. Para esto es necesario ir al sitio <http://www.geogebra.org/cms/>. En este sitio se cuenta con dos opciones: una que hace referencia a un programa instalador que se ubica en el sitio denominado WebStar, la otra (que es la recomendada) descarga el archivo de instalación, que al terminar de descargarse se ejecuta con *doble click*, se siguen las instrucciones por omisión sugeridas y listo.

Una vez terminada la instalación nos encontramos con la siguiente ventana que muestra la pantalla de inicio (a la que hemos agregado un ejemplo).

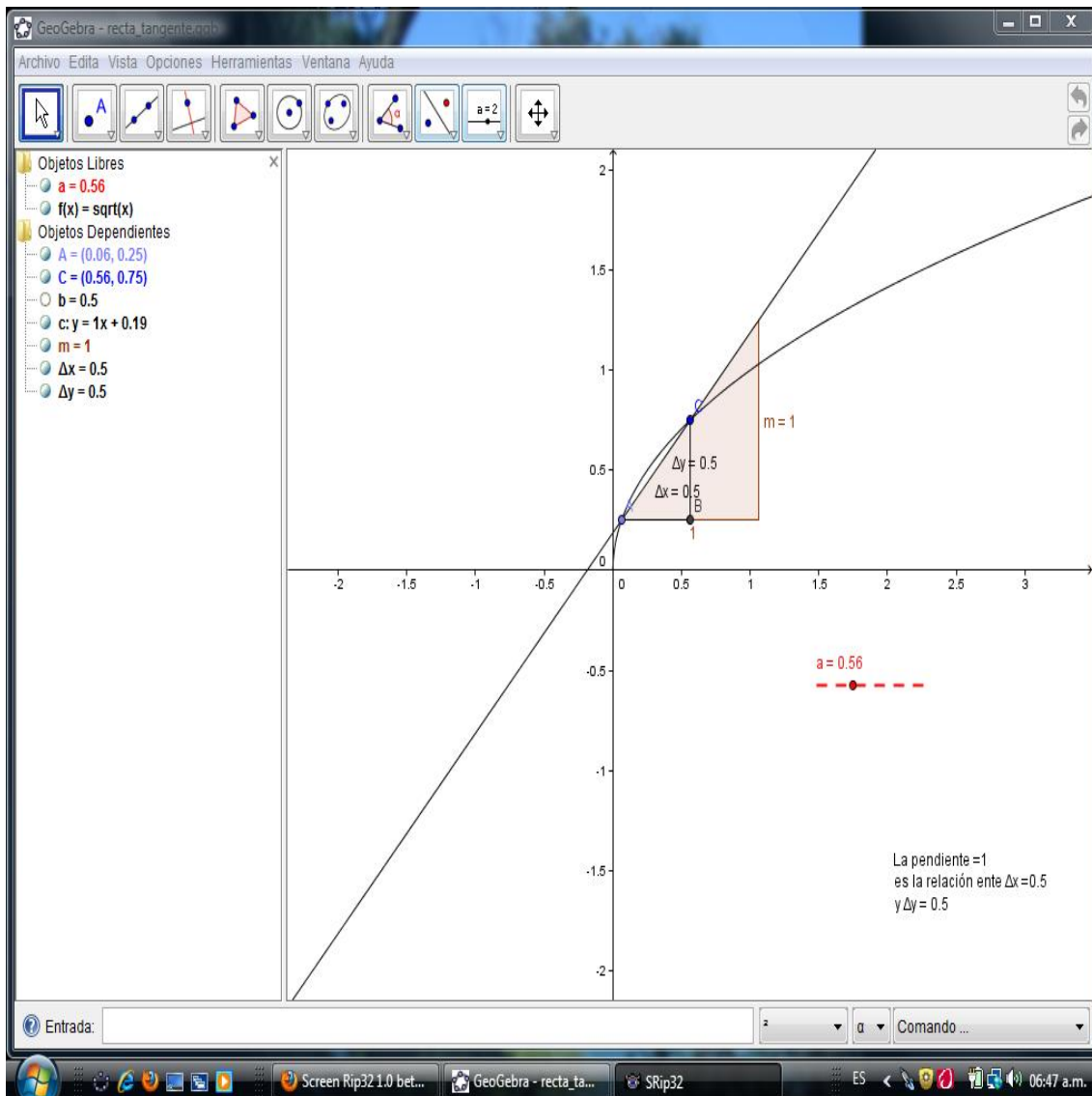


Figure 1: Ventana Principal

Esta pantalla consta de cuatro regiones.

Una corresponde a la del Menu Principal con las siguientes opciones: Archivo, Edita, Vista, etc.



Figure 2: Menú de GeoGebra

El área de trabajo se divide en dos ventanas: la *gráfica*, que es la ventana en donde se representan los distintos objetos (puntos, rectas, circunferencias, etc) introducidos en el

campo de entrada. Ver la siguiente figura.

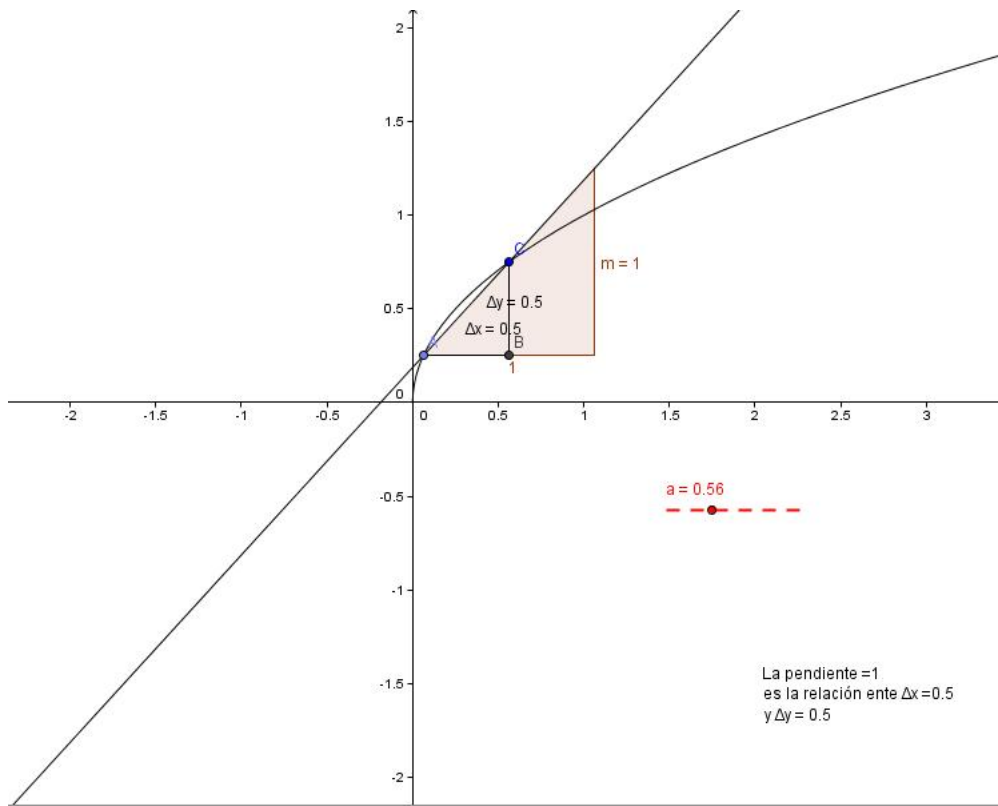


Figure 3: Ventana gráfica

y la *algebraica*, donde queda el registro de los objetos pero algebraicamente. Es decir si se grafica una recta, en la ventana algebraica se observa su ecuación. Veamos el caso de las figuras. Se observa una función raíz $y = \sqrt{x}$, dos puntos en ella A y C. Por estos puntos se hace pasar una recta secante.

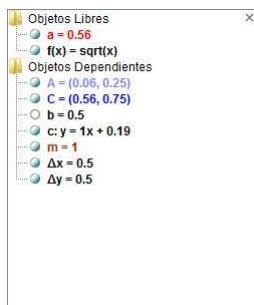


Figura 4: Ventana algebraica

En la ventana algebraica se observa la función y las coordenadas del punto A y B. Además de otros elementos que en este ejemplo están incluidos.

En la parte inferior encontramos el campo de entradas, en él, se escriben los comandos que el programa interpreta y los despliega en la ventana de trabajo o gráfica.

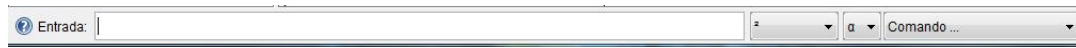


Figure 5: Ventana de entradas

Para mayor información puede descargar el archivo Introducción a GeoGebra [7].

2. Números Reales

La pregunta más difícil que cualquier maestro se puede hacer es: ¿cuánto debe de saber de álgebra un alumno? Junto con esta vienen otras: ¿cuántas propiedades hay?, ¿cuáles son las más importantes?, ¿cuáles son las que debo de tener escritas? o bien, ¿cuántas es suficiente para tener éxito en el curso de matemáticas y los demás en una carrera de Ingeniería? En cualquier carrera de ingeniería es fundamental el conocimiento de las propiedades algebraicas y el manejo adecuado de las expresiones. Pero parece ser que siempre se queda corto el conocimiento de los alumnos y seguido escuchamos, "es que andan mal en álgebra", tanto por parte de maestros de matemáticas como maestros de otras asignaturas.

Tratando de remediar este asunto, los programas académicos de todo el mundo han ideado diferentes formas de "complementar" y "remediar" esta situación, programando cursos extras de álgebra donde se trata de cubrir la mayor cantidad de material posible para que no le falte algo al estudiante. Sin embargo la mayoría de las veces no se ha tenido éxito y vemos que los alumnos siguen "mal en álgebra". Aquí proponemos una alternativa diferente.

En lugar de enseñar mucho, vamos a tratar de enseñar muy poco, yo sé que esto es muy difícil porque desde secundaria el maestro de matemáticas trata de cubrir el mayor material posible siempre tratando de enseñar mucho, pero paradójicamente mientras más trata de enseñar el alumno aprende menos. Lo que aquí vamos a ver es muy poco, si es posible que alumno aprenda solamente unas cuantas propiedades, mientras menos mejor; *pero que las aprenda bien*. Que sepa que con tres propiedades básicas puede explicar y entender todas propiedades de álgebra que va a utilizar en su carrera y que cada conocimiento nuevo o anterior de álgebra, lo ate a estos conceptos básicos. Que vea que toda el álgebra se fundamenta en pocos axiomas básicos y que vaya desarrollando sólidamente la competencia matemática en base a muy pocos cimientos.

Es muy difícil convencer a un maestro de que "enseñe poco", y si quiere enseñar mucho, que cada una de las cosas que se presente esté directamente relacionada con los pocos conocimientos de base y sean consistentes. Nuestra filosofía es: "Enseña poco para que el alumno aprenda mucho".

Para facilitar la comprensión y el manejo de las propiedades algebraicas se han dividido en partes y les hemos dado nombres especiales, esto con el fin de facilitar su comprensión, memorización y su uso; que si bien solamente se utilizan en el ITT, se aclara que se utiliza también el nombre formal.

COMPETENCIA DE LA UNIDAD

Conoce los axiomas de los números reales y relaciona cualquier propiedad algebraica con los axiomas de manera que la competencia algebraica se va desarrollando sólidamente poco a poco en base a los pocos principios esenciales.

COMPETENCIAS ESPECÍFICAS

Aplica correctamente las propiedades algebraicas. Conoce y utiliza la sintaxis y la semántica de las expresiones algebraicas. Identifica y aplica la jerarquía de operadores. Construye árboles sintácticos. Evalúa expresiones algebraicas mediante sustituciones.

ACTIVIDADES

Hacer una cartulina con las propiedades escritas y pegarla en el salón y en cada paso de un ejercicio indicar qué propiedad se está utilizando para que el alumno se familiarice con ellas.

Practicar la elaboración de árboles sintácticos y sustitución en forma escalonada de acuerdo a la dificultad.

Practica la escritura en lenguaje \LaTeX de expresiones matemáticas.

Propiciar la reflexión sobre los conceptos matemáticos, que los alumnos los expliquen con sus propias palabras y que escriban un ensayo sobre sus reflexiones en su sitio.

EVALUACIÓN

Examen escrito. Práctica en \LaTeX (en coordinación con el curso de Competencia Digital). Ejercicios de tarea.

2.1. Propiedades Básicas

El Dilema del Mosquetero.

Una de las novelas más famosas de la Literatura Universal es: *Los tres Mosqueteros* de Alexandre Dumas. Es la historia de un joven habitante de la Gascuña que sabía utilizar muy bien la espada. Como su padre conocía a Mesieur de Tréville Capitán de los Mosqueteros del Rey llegó con una carta de recomendación pues su mayor deseo era volverse mosquetero.

Al salir de ver a Mesieur de Tréville tenía mucha prisa porque vio al hombre misterioso que le robó la carta y por su arrebató le pegó en el hombro a Athos, éste lo retó a duelo a Mediodía junto al Convento de los Carmelitas Descalzos, siguiendo con su prisa se enredó con la capa de Porthos y quedaron de batirse a la 1:00 atrás del Luxemburgo, finalmente recogió un pañuelo de una Dama el cual estaba pisando Aramis y obtuvo su tercer duelo a las 2:00.

Al enfrentar sus compromisos de honor tuvo el siguiente dilema, si podría enfrentar a los tres o solamente a uno, incluso se disculpó con los otros dos pues les dijo, es posible que no cumpla mi compromiso con ustedes porque puedo ser herido; pero haré lo posible, tratando de terminar pronto con los dos primeros para poder cumplir con Aramis que era el tercero.

Al empezar el duelo con Athos, llegaron los Guardias del Cardenal y dijeron: quedan arrestados pues están prohibidos los duelos; los tres mosqueteros le dijeron a D'Artagnan, puedes retirarte porque esta es una disputa entre los Guardias y nosotros; pero D'Artagnan les dijo: me parece injusto que seáis solamente tres contra siete; y se unió a ellos para vencer a los guardias.

A partir de ese momento D'Artagnan, y los tres mosqueteros Athos, Porthos y Aramis fueron inseparables y el libro narra las fascinantes aventuras, que continúan en la novela del *Hombre con la Máscara de Hierro* y en la de *Veinte Años Después*.

En base a este cuento y tomando la experiencia de varios maestros, se llegó a formular una manera de estructurar las propiedades algebraicas con el fin de facilitar su manejo, su aprendizaje y sobre todo mantener el aspecto formal.

Propiedades Básicas de los Números Reales:

Propiedad	Enunciado Formal	Forma Reducida
Cerradura de la Suma	$x, y \in \mathbb{R} \Rightarrow x + y \in \mathbb{R}$	+ es Operación Binaria
Cerradura de la Multiplicación	$x, y \in \mathbb{R} \Rightarrow x * y \in \mathbb{R}$	* es Operación Binaria
Asociativa de la Suma	$a + (b + c) = (a + b) + c$	Reacomodo
Conmutativa de la Suma	$a + b = b + a$	Reacomodo
Conmutativa de la Multiplicación	$a * b = b * a$	Reacomodo
Elemento Inverso Aditivo	$a + (-a) = 0$	Cancelación
Elemento Neutro Aditivo	$a + 0 = a$	Cancelación
Elemento Inverso Multiplicativo	$a * (a^{-1}) = 1$	Cancelación
Elemento Neutro Multiplicativo	$a * 1 = a$	Cancelación
Asociativa de la Multiplicación	$a * (b * c) = (a * b) * c$	Dilema del Mosquetero
Distributiva	$a * (b + c) = a * b + a * c$	Dilema del Mosquetero

Ejemplos.

$$1: a(b + c + d) = ab + ac + ad$$

$$2: (a + b)(c + d) = (a + b)c + (a + b)d = ac + bc + ad + bc$$

$$3: (2x + 3y)(5x - y) = 10x^2 + 15xy - 2xy - 3y^2 = 10x^2 + 13xy - 3y^2$$

Ejercicios: Utilizando las propiedades simplifique las siguientes expresiones:

$$6. (m^2 - m(4m + 2n) + n(5 - n(m + 1)) - (7m^2 + mn - 3n^2))$$



$$5. (7a - 2b)(a^2 - 5ab + 2b^2)$$



$$4. 5(3x - y) + 5(x + 5y) - 4(2x + y)$$



$$3. (7x - 3y)^2$$



$$2. (a + b)(c + d)$$



$$1. x(y + z + w)$$



Figura 6: Escalera para simplificación de expresiones

2.2. Sintaxis y semántica

En matemáticas como en cualquier lenguaje hay dos elementos centrales que se deben tomar en cuenta para poder entender correctamente los conceptos y los procedimientos. El primero es la Sintaxis y el segundo la Semántica.

Explicado de una manera simple la sintaxis es la forma como se escribe y la semántica su significado.

Por ejemplo, analicemos la palabra TUNA.

La sintaxis es la secuencia de las cuatro letras en orden, pero su semántica puede variar. Por ejemplo en español es el fruto del nopal y en inglés es un pescado.

Otro ejemplo. Consideremos TRES y 3. Aquí tenemos dos formas distintas de escribir el número. ¿Qué quiere decir esto?, que tenemos diferente sintaxis pero la misma semántica.

En matemáticas es muy importante la sintaxis (la forma cómo se escribe) porque un cambio pequeño puede hacer que varíe la semántica. Por ejemplo: $\text{sen}x^2$ comparado con sen^2x .

En la primera expresión primero debemos elevar la variable x al cuadrado y después calcular la función seno. En cambio en la segunda expresión, primero se aplica la función seno y después el resultado se eleva al cuadrado.

En otras palabras la segunda expresión es equivalente (tiene la misma semántica) que $(\text{sen}x)^2$

Hay que ser muy cuidadosos, sobretodo con los paréntesis, es muy común quitar paréntesis que no se necesitan, pero hay que estar seguros de que al cambiar la sintaxis quitando paréntesis la semántica sea la misma. Si en el ejemplo anterior, a la expresión $(\text{sen}x)^2$ le quitamos los paréntesis, podríamos dejar la expresión $\text{sen}x^2$, que como ya mencionamos es otra cosa.

¿Cómo aprender correctamente la sintaxis en matemáticas?

Analicemos la expresión: $2 + 5 * 3$

Lo que sucede es que las expresiones algebraicas utilizan los operadores binarios $+$, $-$, $*$, $/$; los cuales se llaman binarios porque representan operaciones entre dos elementos. Si queremos utilizar 3 , debemos usar paréntesis. Así $2 + 5 * 3$ puede ser $(2+5)*3$ ó $2+(5*3)$. El paréntesis indica que operación debe ser primero.

Podríamos representar las dos formas anteriores mediante árboles sintácticos:



En el caso de $2 + 5 * 3$ los dos resultados están bien. La calculadora sencilla toma el orden de escritura y se obtiene 21 (Primer Árbol), la calculadora científica, en cambio, utiliza la jerarquía algebraica de operadores y obtiene 17 (Segundo Árbol).

Jerarquía de Operadores:

No es necesario utilizar paréntesis cuando el orden en que se deben efectuar las operaciones cumple con la siguiente jerarquía:

1º. Operadores unitarios y funciones como: Potencia, Raíz, seno, coseno, ... logarítmica, exponencial, etc.

2º. Multiplicaciones y divisiones.

3º. Sumas y restas.

Nota: Los paréntesis alteran la jerarquía de los operadores, o sea que las operaciones entre paréntesis se llevan a cabo primero.

Ejercicio: En las siguientes expresiones indicar el orden de los operadores:

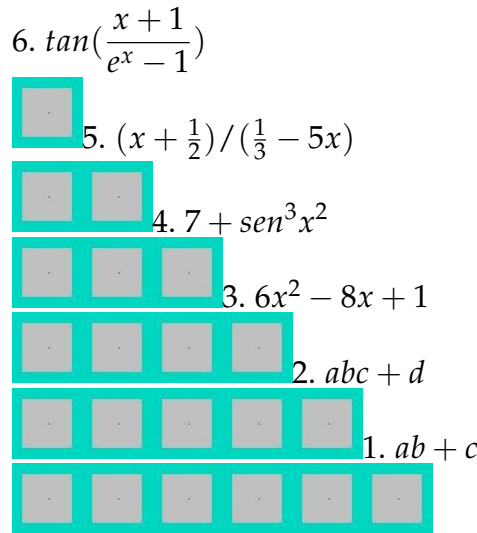
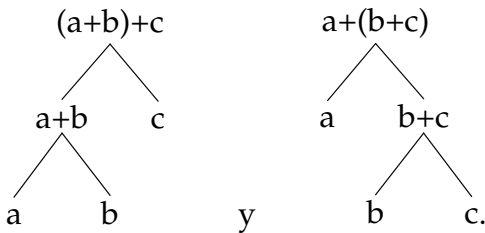


Figura 7: Escalera para indicar el orden de los operadores

Para resolver cada uno de los ejemplos, primero debemos poner la expresión en forma lineal, por ejemplo: $\frac{2+x}{6-x^2}$ quedaría: $(2+x)/(6-x^2)$

Ejercicio: Construir el árbol sintáctico en los ejercicios anteriores.

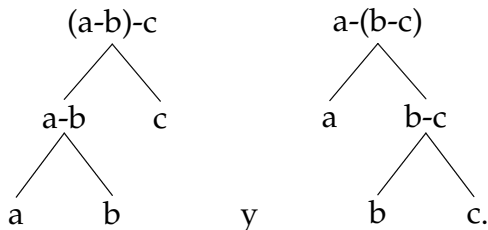
En el caso de tener varias sumas o multiplicaciones no es necesario usar paréntesis, analicemos: $a + b + c$. Las expresiones podrían ser: $(a + b) + c$ ó $a + (b + c)$ y los árboles son:



Pero por la ley asociativa (reacomodo) el resultado de los dos árboles es igual, por lo que podemos tomar cualquiera y por costumbre podemos suprimir los paréntesis. De cualquier manera al principio mientras nos familiarizamos con las expresiones y adquirimos pericia es conveniente numerarlos de izquierda a derecha como en el primer árbol.

¿Qué sucede si en lugar de suma (+) es resta (-)?

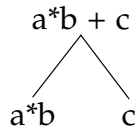
Los casos serían: $(a-b)-c$ y $a-(b-c)$ y los árboles



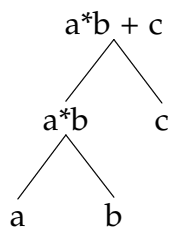
La resta no es asociativa así que son dos expresiones con significado distinto. En este caso sí es importante que se enumeren los operadores de izquierda a derecha.

Árboles Sintácticos: Para entender mejor la sintaxis de una expresión podemos hacer un árbol sintáctico. Empezando con el operador de menor rango (o sea el que tiene el número mayor) empezar a descomponer hacia abajo en una o dos ramas para cada operador hasta terminar con todos los operadores.

Ejercicio 1. La expresión es $a * b + c$ y sabemos que a la suma le tocó el número 2, por lo tanto en un primer paso tenemos:



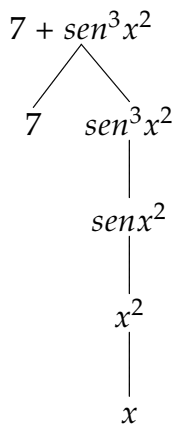
Finalmente descomponemos el producto y tenemos el árbol.



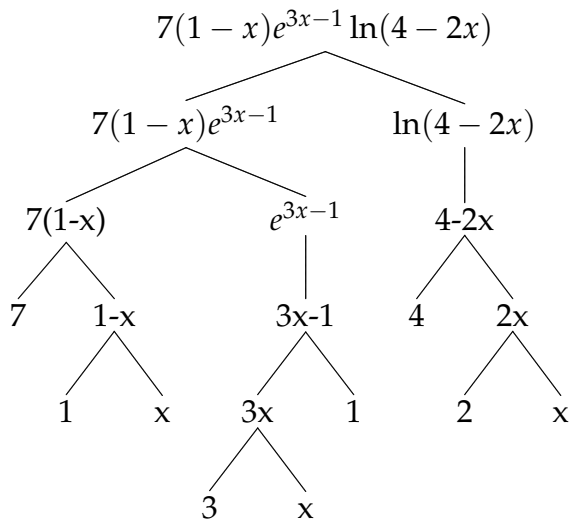
Hacer el árbol sintáctico de los otros 5 ejercicios anteriores.

Se presentan otros dos ejemplos

Ejemplo: La expresión $7 + \text{sen}^3 x^2$ tiene el árbol:



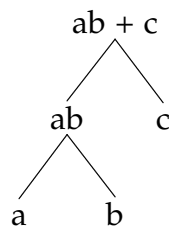
Ejemplo: La expresión $7(1 - x)e^{3x-1} \ln(7 - 2x)$ tiene el árbol:



2.3. Sustitución algebraica

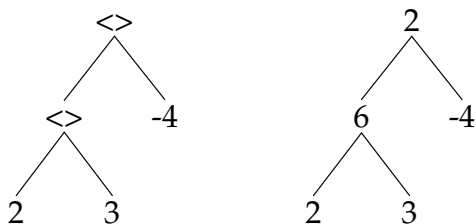
Uno de los aspectos más importantes de los árboles sintácticos es su utilización para entender el concepto de sustitución, porque nos indica el orden correcto en que se deben hacer las operaciones para evaluar una expresión.

Ejercicio 1. Evaluar la expresión $ab + c$ si $a = 2, b = 3, c = -4$.



El árbol sintáctico es:

Reemplazando las hojas del árbol por los valores y efectuando las operaciones, el resultado está en el nodo raíz: 2.



Ejemplo: Evaluar la expresión $\frac{2+x}{6-x^2}$ con $x=3$

2.4. Conceptos matemáticos

2.4.1. Resta y división

La operación de sustracción o **resta** $a - b$ en el conjunto de los números reales \mathbb{R} , esta definida mediante la adición del inverso aditivo de b , es decir: $a - b = a + (-b)$

Por ejemplo para el conjunto de los números naturales $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$ los inversos se representan como $\mathbb{N} = \{-1, -2, -3, \dots\}$ y así, agregando el cero, se forma el conjunto de los enteros. $\mathbb{Z} = \{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$

Como la resta es sumar el inverso, cuando tenemos expresiones algebraicas con sumas y restas, las restas las tomamos como sumas (de inversos) y podemos tratarlas prácticamente igual que las sumas. Por ejemplo $a(b - c) = ab - ac$ por lo que la Ley Distributiva de la suma también se cumple para la resta. De este modo no tenemos que estar aprendiendo nuevas reglas para la operación de resta.

La **división** de a entre b , se define como el producto de a por el inverso multiplicativo de b : $\frac{a}{b} = a * \frac{1}{b} = a * b^{-1}$; $b \neq 0$

División y el cero: (1). $\frac{0}{a} = 0$ (2). $\frac{a}{0}$ no está definida (3). $\frac{0}{0}$ indeterminado (tampoco está definido)

Ver las divisiones como multiplicaciones por un inverso es muy útil al igual que la resta, porque podemos extrapolar varias de las operaciones y conceptos básicos de la multiplicación a la división. Así por ejemplo $\frac{a+b}{c} = \frac{a}{c} + \frac{b}{c}$ debido a que c , al estar dividiendo, está implicando en realidad una multiplicación (considerando su inverso) por lo tanto se cumple la Ley Distributiva (Dilema del Mosquetero, 2a. opción).

2.4.2. Expresión algebraica y polinomios

Polinomio

En secundaria y preparatoria se conoce un polinomio como una expresión algebraica con varios términos, si es monomio con un término, si es binomio con dos, trinomio con tres y polinomio no se con cuántos pero deben ser muchos. Sin embargo desde el punto de vista de matemáticas y su manejo formal un polinomio es una expresión algebraica donde aparecen únicamente sumas, diferencias o productos de números reales o variables. Podemos también dar una definición formal.

Definición. Un polinomio de una variable de grado n , es una expresión de la forma

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + a_{n-2} x^{n-2} + \dots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0 \text{ (con } a_n \neq 0 \text{)}$$

Ejemplos⁵:

$$\begin{array}{lll} 1) & 5a - 6cde & 2) & 7xy + az - 2b + 3 & 3) & 3x^3 + 2x^2 - 12x - 8 \\ 4) & x^2 + 2x + 5 & 5) & x^{16} + 1 & & \end{array}$$

⁵Nota: (1) y (2) son multivariables, el resto con polinomios univariables

Ejemplos de expresiones que no son polinomios:

1) $\frac{1}{x} + 3x$ 2) $\frac{x-5}{x^2}$ 3) $3x^2 + \sqrt{x} - 2$
 4) $\frac{x}{y} + \sqrt{2}$ 5) $x^{\frac{2}{3}} - y^{-\frac{1}{3}}$

Ejercicio: Identificar si la expresión es polinomio. Si es polinomio encontrar el grado.

6. $\frac{3u^3v^4 - 2u^5v^2 + (u^2v^2)^2}{u^3v^2}$



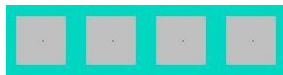
5. $45x^7 + 38x^5 - 8x^3$



4. $\frac{12m^2}{n} + \frac{17m}{\sqrt{n}} - 14\sqrt{n}$



3. $xy - 3z + 2$



2. $60x^2 - 85x - 24$



1. $x^4 - 3x^2 + 7x + 4$



Raíces.

La raíz cuadrada de un número x es un número no negativo y tal que: $y^2 = x$ y se representa por $x^{\frac{1}{2}}$ o por \sqrt{x}

Propiedades:

i) $\sqrt{ab} = \sqrt{a}\sqrt{b}$ ii) $\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$ Si las raíces existen.

Debido a la definición $\sqrt{x^2} = |x|$. **Nota:** $\sqrt{x^2} \neq x$ (cuando $x < 0$)

Ejemplos Numéricos:

1) $\sqrt{64} = 8$ 2) $\sqrt{\frac{16}{25}} = \frac{4}{5}$ 3) $\sqrt{\frac{4}{9}} = \frac{2}{3}$ 4) $\sqrt{72} = \sqrt{36 \cdot 2} = \sqrt{36} \cdot \sqrt{2} = 6\sqrt{2}$

Ejemplos algebraicos: Suponiendo $x, y \geq 0$

1) $\sqrt{a^4} = a^2$ 2) $\sqrt{x^2y^6} = (\sqrt{x^2}\sqrt{y^6}) = xy^3$ 3) $\sqrt{9x^4} = \sqrt{3^2}\sqrt{x^4} = 3x^2$
 4) $\sqrt{4x^2y^4} = \sqrt{2^2x^2y^4} = \sqrt{2^2}\sqrt{x^2}\sqrt{y^4} = 2xy^2$ 5) $\sqrt{36x^2y^8} = \sqrt{6^2}\sqrt{x^2}\sqrt{y^8} = 6xy^4$

Ejercicio: Definir la raíz n -ésima de un número.

Las expresiones que contienen operaciones polinómicas y raíces se llaman **Expresiones Algebraicas**.

2.4.3. Ecuaciones

Una ecuación es una igualdad con variable(s). La igualdad se representa matemáticamente con el símbolo $=$ en medio de dos expresiones. Aquí consideraremos exclusivamente ecuaciones con variable real y cuyas expresiones son formadas por operaciones algebraicas.

Ejemplos:

1) $4(x - 3) = 4x - 12$ 2) $x + 2 = 10$ 3) $x + 5 = x - 7$

4) $x^2 - 3x = 18$

5) $6x - 7 = 2x + 5$

Un valor de la variable es **solución** de la ecuación si al sustituir el valor por la variable se obtiene una proposición verdadera.

Ejemplos:

1. $x = 1$ es solución de $4(x - 3) = 4x - 12$ pues $4(1 - 3) = 4(1) - 12 \Rightarrow -8 = -8$

2. $x = 5$ es solución de $x^2 - 5 = 4x$ pues $(5)^2 - 5 = 4(5) \Rightarrow 20 = 20$

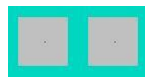
3. $x = 3$ es solución de $x^2 + \frac{3}{x} = \frac{x^3+3}{x}$. $(3)^2 + \frac{3}{3} = \frac{(3)^3+3}{3} \Rightarrow 9 + 1 = \frac{27+3}{3} \Rightarrow 10 = \frac{30}{3}$

Ejercicios: Sustituir el valor de la variable y comprobar si el valor dado es una solución.

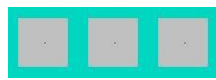
6. $\sqrt{3}x - 2 = 0$, $x = \frac{2}{\sqrt{3}}$



5. $12w - 7w = 2w + 1$, $w = \frac{1}{3}$



4. $5x + 3 = 7x - 2$, $x = \frac{5}{2}$



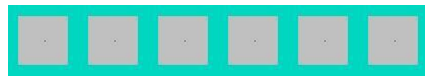
3. 8) $(x + 3) - (3x - 1) = 0$, $x = 2$



2. $(3x - 4) - 9x = 6x + 8$, $x = -1$



1. $6z - 7 = 2z + 5$, $z = 3$



Resolver una ecuación es encontrar los valores de la(s) variable(s) que sean solución, esto lo veremos en la unidad 3.

2.4.4. Funciones

Es un conjunto de pares ordenados tales que no hay dos pares con el mismo primer elemento. También se puede expresar como la relación matemática entre el conjunto A y el conjunto B . Notación $f : A \rightarrow B$.

Dominio de una Función

El conjunto de los primeros elementos en los pares ordenados en una función f se llama **Dominio** y se denota: $DOM(f)$ y el conjunto formado por los segundos elementos se llama **Rango** y su notación es: $RAN(f)$.

Si consideramos la función como una relación, a cada elemento del dominio le corresponde un elemento único del rango, sin embargo para un elemento del rango podría haber varios elementos del dominio. Si a un elemento del dominio le llamamos x entonces el correspondiente elemento del rango se denota por $f(x)$.

Ejemplos:

1) $f(x) = 2x + 4$, Función lineal.

- 2) $f(x) = 4x^2 + 2x - 3$, Función cuadrática.
- 3) $f(x) = \frac{1}{2x+3}$, Función racional lineal.
- 4) $f(x) = \frac{1}{4x^2+6x+5}$, Función racional cuadrática.
- 5) $f(x) = \text{sen}2x$, Función Trigonométrica.
- 6) $f(x) = 5 + \ln(x - 1)$, Función logarítmica.
- 7) $f(x) = \sqrt{9 - x^2}$, Función Raíz.
- 8) $f(x) = \sqrt{3x + 2}$, Función Raíz.
- 9) $f(x) = e^{x-1}$, Función exponencial.

En la Unidad 4 volveremos a tratar las funciones y veremos gráficas utilizando GeoGebra.

2.4.5. Valor absoluto

El valor absoluto de un número a , denotado $|a|$, es uno de los dos números $+a$ o $-a$, el que sea positivo, 0 (el número 0) si $a=0$.

$$|a| = \begin{cases} a & a \geq 0 \\ -a & a < 0 \end{cases}$$

Ejemplos:

- 1) $|3| = 3$ 2) $|-10| = -(-10) = 10$ 3) $|8 - 6| = |2| = 2$
- 4) $|7 - 15| = |-8| = -(-8) = 8$ 5) $|5 - 12| = |-7| = 7$

Propiedades:

- i) $|-a| = |a|$ ii) $|a - b| = |b - a|$ iii) $|a| |b| = |ab|$ iv) $|\frac{a}{b}| = \frac{|a|}{|b|}$
- v) $|a + b| \leq |a| + |b|$ Desigualdad Triangular.

3. Álgebra

Indiscutiblemente que lo más importante es entender las propiedades algebraicas, reflexionar sobre ellas, conectar los conocimientos y tener una preparación sólida. Sin embargo si no se tiene destreza en el manejo del álgebra, los conceptos teóricos no nos servirían de mucho; así que en esta unidad pretendemos principalmente que el alumno adquiera la habilidad mecánica que un alumno de ingeniería ocupa en el aspecto algebraico.

Muchos de los ejercicios, si bien son de mecanización, es importante señalar que se debe de hacer mención en cada paso algebraico, de la propiedad utilizada o la razón por la que es posible hacerlo, propiciando así la reflexión, para que el alumno pueda conectar lo que va haciendo con sus conocimientos previos y que su competencia algebraica vaya creciendo.

Al igual que en los casos anteriores no queremos "enseñar mucho", con dos o tres cosas que aprenda es bueno: que puedan aplicar la Ley Distributiva (Dilema del Mosquetero), que puedan factorizar un trinomio y que sepan realizar operaciones con fracciones. Esto es lo esencial y lo demás lo pueden ir aprendiendo y reforzando en el transcurso del presente y los próximos semestres. Lo más importante aquí es que puedan identificar en qué situaciones se aplica y que puedan desarrollar el procedimiento sin error en más del 90 % de los casos.

COMPETENCIA DE LA UNIDAD

Tiene destreza aplicando las propiedades del álgebra elemental y resuelve ecuaciones justificando sus procedimientos.

COMPETENCIAS ESPECÍFICAS

Domina las tres propiedades básicas de los números reales. Tiene destreza para aplicar las propiedades en expresiones algebraicas. Factoriza una expresión algebraica. Justifica cada uno de sus pasos algebraicos. Resuelve ecuaciones lineales y cuadráticas.

ACTIVIDADES

Solución de ejercicios en forma escalonada. Actividad en equipos donde se asigna a cada paso algebraico las propiedades utilizadas. Presentación de ejercicios resueltos por equipos, análisis y reflexión de resultados. Ejercicios de tareas en la libreta.

EVALUACIÓN

Examen escrito. Revisión de tareas. Revisión de portafolio y del sitio.

3.1. Operaciones algebraicas básicas

Introducción

En este tema vamos a aplicar las propiedades de los números reales para efectuar operaciones, simplificar y factorizar expresiones algebraicas. Al realizar los ejercicios recomendados se desarrollará el dominio y la fluidez necesaria para enfrentar con éxito los temas subsiguientes.

Recordemos que las propiedades básicas de los números reales se pueden resumir en tres: *Reacomodo*, *Cancelación* y *Dilema del Mosquetero*. Con estas tres como base y algunas observaciones y aclaraciones vamos a poder desarrollar todos los conocimientos requeridos de álgebra.

Primeramente por el *Dilema del Mosquetero* (Ley Distributiva de la Multiplicación con respecto a la Suma), vemos que

$$(7 + 5)x = 7x + 5x, \text{ por lo que si vemos esta propiedad a la inversa tenemos } 7x + 5x = (7 + 5)x = 12x$$

Esto se le conoce como *reducción de términos semejantes*.

a) Adición y sustracción de Polinomios.

Símbolos de agrupación. Los símbolos de agrupación, como son los paréntesis (), llaves { } y corchetes [], se utilizan para señalar, de una manera sencilla, más de una operación. Recordemos que los paréntesis alteran la jerarquía de los operadores, o sea que las operaciones entre paréntesis se llevan a cabo primero.

Jerarquía de Operadores: No es necesario utilizar paréntesis cuando el orden en que se deben efectuar las operaciones cumple con la siguiente jerarquía:

1°. Operadores unitarios y funciones como: Potencia, Raíz, seno, coseno, logarítmica, exponencial, etc.

2°. Multiplicaciones y divisiones.

3°. Sumas y restas.

Ejemplo: Eliminar los símbolos de agrupación y reducir términos semejantes:

$$\begin{aligned} 1) \quad 2x - (5x - 2y) + (x - 6y) &= 2x - 5x + 2y + x - 6y = (2x - 5x + x) + (2y - 6y) \\ &= -2x - 4y \end{aligned}$$

Aquí se utilizó el *Reacomodo* (Leyes asociativa y conmutativa de la suma y el Dilema del Mosquetero, además de la definición de resta que significa sumar el inverso.

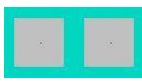
$$\begin{aligned} 2) \quad 6a - \{2b + [3 - (a + b) + (5a - 2)]\} &= 6a - \{2b + [3 - a - b + 5a - 2]\} = 6a - \{2b + \\ 3 - a - b + 5a - 2\} \\ &= 6a - 2b - 3 + a + b - 5a + 2 = (6a + a - 5a) + (-2b + b) + (-3 + 2) = 2a - b - 1 \end{aligned}$$

Ejercicios: Simplificar

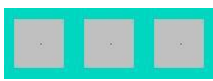
$$6. \quad a + \{-2b - [3 + (5a - 2b) - (7a + 2)]\}$$



$$5. \quad 15 - 5[4 - 2(x + 1)] - [3x - 5(x + 4)]$$



$$4. \quad 3y - [x - 2(3x - y)] - [2y - (x + 3y)]$$



$$3. \quad 5x + [6 - (2x - 1)]$$



$$2. \quad 2x - (2 - x)$$



$$1. \quad 3a + (2 + 5a)$$



b) Multiplicación y División

Además de las leyes básicas de los números reales es conveniente utilizar algunas definiciones sobre notación y manejo algebraico. Veremos también que algunas propiedades muy útiles se desprenden de los axiomas.

Definición.

Si $a \in \mathbb{R}$, $m \in \mathbb{N}$, entonces: $a^m = a * a * \dots * a$ (m veces), $a^{-m} = \frac{1}{a^m}$, $a^0 = 1$.

Propiedades:

1. *Leyes de los signos.* (Se justifican con las propiedades básicas y la definición de inverso)

$$(+a)(+b) = +ab \quad (-a)(+b) = -ab \quad (+a)(-b) = -ab \quad (-a)(-b) = +ab$$

2. *Potencias.*

Si $a \in \mathbb{R}$ $m, n \in \mathbb{Z}$, entonces: i) $a^m * a^n = a^{m+n}$ ii) $(ab)^n = a^n b^n$

Si $a \neq 0$ entonces: iii) $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$ iv) $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$

3. *Fracciones.*

$$i) \frac{a}{b} * \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd} \quad ii) \frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \frac{ad}{bc} \quad iii) \frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad+bc}{bd}$$

Ejemplos:

$$1) (2ab^2)(3a^4bc^2) = (2 * 3)(a^1 * a^4)(b^2 * b)(c^2) = 6a^5b^3c^2$$

Aquí utilizamos la Ley Asociativa de la Multiplicación (*Dilema del Mosquetero*), la Ley Conmutativa de la Multiplicación (*Reacomodo*) y la definición de exponente.

$$2) -2x^2(x^2 - x + 4) = (-2x^2)(x^2) + (-2x^2)(-x) + (-2x^2)(4) = -2x^4 + 2x^3 - 8x^2$$

$$3) 3a^2b(a^2b - 2b^2c + 5c^2a) = 3a^2b(a^2b) + 3a^2b(-2b^2c) + 3a^2b(5c^2a) = 3a^4b^2 - 6a^2b^3c + 15a^3bc^2$$

Nota: En los últimos dos ejemplos se utilizó la Ley Distributiva Extendida (*Dilema del Mosquetero*).

Ejercicios. Efectuar operaciones y simplificar

$$6. x^2(2x^2 - 3x - 4) - x(x^3 - 3x^2 - 4x)$$



$$5. -2a^2b(a^3 + 5a^2b^2 - 3b^4)$$



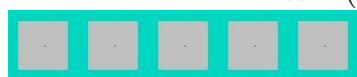
$$4. (2ab^3)^2(-3^2a^2c)^3(-a^4bc^2)^5$$



$$3. 3x^2(x^3 - 2x^2 + 1)$$



$$2. (x^2)(x^3) - (-x^2)(x)$$



$$1. (-2^2ab^4)^3(a^2b)^5$$



Para multiplicar polinomios, se considera el primer polinomio como una sola cantidad y se aplica la *Ley Distributiva (Dilema del Mosquetero)*.

Ejemplos:

$$1. (x+2)(x+3) = (x+2)x + (x+2)3 = x(x+2) + 3(x+2) = x^2 + 2x + 3x + 6 \\ = x^2 + 5x + 6$$

$$2. (3x-4)^2 = (3x-4)(3x-4) = (3x-4)3x + (3x-4)(-4) = 3x(3x-4) - 4(3x-4) \\ = 9x^2 - 12x - 12x + 16 = 9x^2 - 24x + 16$$

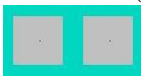
$$3. (x^2 - 2x + 1)(2x - 3) = (x^2 - 2x + 1)(2x) + (x^2 - 2x + 1)(-3) \\ = 2x^3 - 4x^2 + 2x - 3x^2 + 6x - 3 = 2x^3 - 7x^2 + 8x - 3$$

Ejercicios:

$$6. (x^2 + 3x + 2)(x^2 - 3x + 2)$$



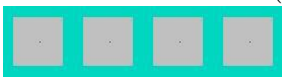
$$5. (x - 2y)(x^2 + 2xy + 4y^2)$$



$$4. (2x - 1)(4x^2 + 2x + 1)$$



$$3. (x + 2)(x - 4) - x(x - 2)$$



$$2. (2x - 5)(x + 7)$$



$$1. (x + 7)(x - 3)$$



Finalmente veremos potencias de fracciones

$$1. \left[\frac{2x^4yz}{6xy^2} \right]^3 = \left[\frac{x^3z}{3y} \right]^3 = \frac{x^9z^3}{3^3y^3} = \frac{x^9z^3}{9y^3}$$

$$2. \frac{(2a^2bc^3)^3}{(3ab^2)^2} = \frac{2^3a^6b^3c^9}{3^2a^2b^4} = \frac{8a^4c^9}{9b}$$

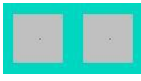
$$3. \frac{16a^4b^3}{(-2ab)^3} + \frac{36a^5b^2}{(-3a^2b)^2} = \frac{16a^4b^3}{(-2)^3a^3b^3} + \frac{36a^5b^2}{(-3)^2a^4b^2} = \frac{16a^4b^3}{-8a^3b^3} + \frac{36a^5b^2}{9a^4b^2} = -2a + 4a = 2a$$

Ejercicio No.5: Efectuar operaciones y simplificar

$$3. \left(\frac{6x^2y^3z}{8xy^5z^2} \right)^3$$



$$2. \frac{-44a^3b^2}{66a^5b^8}$$



$$1. \frac{x^6y^4}{x^3y^2}$$



3.2. Factorización

Si un polinomio se escribe como el producto de otros polinomios, cada polinomio del producto es un factor del polinomio original.

Por ejemplo: Como $x^2 - 9 = (x + 3)(x - 3)$, entonces $(x + 3)$ y $(x - 3)$ son factores de $x^2 - 9$.

La factorización es de gran importancia en numerosas aplicaciones matemáticas, ya que permite reducir el estudio de expresiones complicadas al estudio de expresiones más simples. Se pueden determinar propiedades importantes del polinomio $x^2 - 9$, haciendo un análisis de los factores $(x + 3)$ y $(x - 3)$.

Interesan principalmente los factores no triviales de los polinomios, esto es factores que contienen polinomios de grado mayor que cero, excepto si los coeficientes son enteros en cuyo caso se separa el factor común entero de los términos del polinomio. Esto se hace aplicando la ley distributiva (Dilema del Mosquetero) a la inversa.

$$\text{Ejemplo: } 4x^2y + 8z^3 = 4(x^2y + 2z^3)$$

Es necesario especificar el sistema (conjunto) del cual se han de elegir los coeficientes en las factorizaciones, en este caso sólo se seleccionarán coeficientes enteros.

Factorización por Factor Común

Como ya habíamos mencionado la factorización por factor común, Ley Distributiva (Dilema del Mosquetero) es muy importante y es quizá la esencia de los métodos de factorización porque en su comprensión está la base de todos los métodos de factorización.

La explicación es muy simple, factorizar por Factor Común es aplicar la Ley Distributiva (Dilema del Mosquetero / 2a. opción) a la inversa, esto es:

$$ab + ac = a(b + c)$$

Ejemplos:

1. $7xy + 2xz = x(7y + 2z)$
2. $9a^2 + 12ab = 3a(3a + 4b)$
3. $10x^3yz^4 + 15xy^4z^3 - 20x^2y^2z^2 = 5xyz^2(2x^2z^2 + 3y^3z - 4xy)$

Una variante interesante del Método de Factor Común es la factorización por Agrupación: En este caso se separan en dos partes los términos de la expresión y cada uno se factoriza por separado, si en los resultados queda un factor común se vuelve aplicar el método de Factor Común:

$$ac + ad + bc + bd = a(c + d) + b(c + d) = (c + d)(a + b)$$

Ejemplos:

- 1) $x^2 + 7x + xy + 7y = x(x + 7) + y(x + 7) = (x + 7)(x + y)$
- 2) $x^3 + x^2 + 6x + 6 = x^2(x + 1) + 6(x + 1) = (x + 1)(x^2 + 6)$
- 3) $a^2 - 2a - 15 = a^2 - 5a + 3a - 15 = a(a - 5) + 3(a - 5) = (a - 5)(a + 3)$
- 4) $2a^3 - 5a^2 + 4a - 10 = a^2(2a - 5) + 2(2a - 5) = (2a - 5)(a^2 + 2)$

Ejercicio. Factorizar:

6. $7x^2 - 14x - 6x + 12$



5. $x^3 + 4x^2y + xy^2 + 4y^3$



4. $x^3 - 9x^2 + 2x - 18$



3. $5a^5b^4 - 10a^3b^6 + 20a^2b^8$



2. $4xy - 6xz + 8xw$



1. $7xy + 2xz$



Factorización por Productos Notables (opcional)

- 1) $x^2 - y^2 = (x + y)(x - y)$, Diferencia de cuadrados.
- 2) $x^2 + 2xy + y^2 = (x + y)(x + y) = (x + y)^2$, Trinomio cuadrado perfecto.
- 3) $acx^2 + (ad + bc)x + bd = (ax + b)(cx + d)$, Trinomio cuadrado no perfecto.
- 4) $x^3 + y^3 = (x + y)(x^2 - xy + y^2)$, Suma de cubos.
- 5) $x^3 - y^3 = (x - y)(x^2 + xy + y^2)$, Diferencia de cubos.

Factorización de un trinomio cuadrático

Empezando también con la Ley Distributiva (Dilema del Mosquetero) podemos efectuar el siguiente producto:

$$(ax + b)(cx + d) = acx^2 + (ad + bc)x + bd$$

Si observamos con cuidado, vemos que el coeficiente del término cuadrático es el producto de a y c , que son los coeficientes de x en los factores, el término independiente de x es el producto de b y d , que son los términos independientes de x en los factores; tenemos entonces dos pares de números y el coeficiente de x es la suma de los resultados al multiplicar los primeros por los segundos. Esto es:

acx^2	$+(ad + bc)x$	$+bd$
a		b
c		d

O sea que haciendo el producto cruzado de a con c , y de b con d se obtiene el coeficiente de x

Ejemplos:

$$\begin{array}{ll} 1) & x^2 + 8x + 15 = (x + 5)(x + 3) \\ 2) & 5x^2 - 14x - 3 = (x - 3)(5x + 1) \\ 3) & x^2 + 10x + 25 = (x + 5)(x + 5) = (x + 5)^2 \\ 4) & 6x^2 - 7x - 5 = (2x + 1)(3x - 5) \end{array}$$

Ejercicio. Factorizar los siguientes trinomios:

6. $7x^2 - 20x + 12$



5. $5x^2 - 17x + 6$



4. $5x^2 - 14x - 3$



3. $x^2 - 4x - 21$



2. $x^2 + 2x - 8$



1. $x^2 - x - 6$



3.3. Operaciones con Fracciones

Muchos problemas en matemáticas incluyen combinaciones de expresiones racionales y luego se trata de simplificar el resultado.

Puesto que las expresiones racionales son cocientes que contienen símbolos que representan números reales, se pueden aplicar las propiedades para cocientes.

En problemas de simplificación es de particular importancia la siguiente propiedad:

$$\frac{ad}{bd} = \frac{a}{b} * \frac{d}{d} = \frac{a}{b} * 1 = \frac{a}{b} \quad \text{Esto es,} \quad \frac{ad}{bd} = \frac{a}{b}$$

Esta propiedad se enuncia de la siguiente manera: «Un factor común en el numerador y en el denominador puede ser cancelado del cociente». Un modo de usar esta técnica en problemas en que intervienen expresiones racionales es factorizando el numerador y el denominador de la expresión racional dada en factores primos, y cancelando los factores comunes que aparezcan tanto en el numerador como en el denominador. La expresión resultante se dice que ha sido simplificada, que es irreducible.

Ejemplos:

$$\begin{array}{l} 1. \quad \frac{3a^3 - 2a^2b - ab^2}{-ab} = \frac{3a^3}{-ab} + \frac{-2a^2b}{-ab} + \frac{-ab^2}{-ab} = \frac{-3a^2}{b} + 2a + b \\ 2. \quad \frac{12x^3 - 6x^2 + 18x}{6x} = \frac{12x^3}{6x} - \frac{6x^2}{6x} + \frac{18x}{6x} = 2x^2 - x + 3 \\ 3. \quad \frac{2-x-3x^2}{6x^2-x-2} = \frac{(1+x)(2-3x)}{(2x+1)(3x-2)} = -\frac{(3x-2)(1+x)}{(3x-2)(2x+1)} = -\frac{(1+x)}{(2x+1)} \end{array}$$

Muchas veces se deben hacer operaciones antes de simplificar

$$4. \frac{x^2-6x+9}{x^2-1} * \frac{2x-2}{x-3} = \frac{(x-3)(x-3)}{(x-1)(x+1)} * \frac{2(x-1)}{(x-3)} = \frac{2(x-3)(x-3)(x-1)}{(x+1)(x-3)(x-1)} = \frac{2(x-3)}{(x+1)}$$

$$5. \frac{x+2}{2x-3} \div \frac{x^2-4}{2x^2-3x} = \frac{x+2}{2x-3} * \frac{2x^2-3x}{x^2-4} = \frac{x+2}{2x-3} * \frac{x(2x-3)}{(x+2)(x-2)} = \frac{x(x+2)(2x-3)}{(x+2)(x-2)(2x-3)} = \frac{x}{x-2}$$

Una variante importante de la suma de fracciones es cuando los denominadores tienen un factor común:

$$\frac{a}{bm} + \frac{c}{dm} = \frac{adm+cbm}{bdm^2} = \frac{m(ad+bc)}{bdm^2} = \frac{ad+bc}{bdm}$$

En este caso el procedimiento es mediante el uso del Mínimo Común Múltiplo (MCM) de los denominadores o Mínimo Común Denominador (MCD) de las fracciones. El MCD de las fracciones se puede encontrar mediante la factorización en primos de cada denominador, y multiplicando luego los factores primos distintos utilizando el mayor exponente que aparezca en cada factor primo.

$$6. \frac{6}{x(3x-2)} + \frac{5}{3x-2} - \frac{2}{x^2} =$$

a) Los denominadores se factorizan primeramente en caso de que no estén ya factorizados.

b) Encontrar el MCD: en este caso es $x^2(3x-2)$.

c) Dividir el MCD por cada denominador: el cociente se multiplica por el numerador.

$$\frac{x^2(3x-2)}{x(3x-2)} = x, \text{ se multiplica por } 6.$$

$$\frac{x^2(3x-2)}{(3x-2)} = x^2, \text{ se multiplica por } 5.$$

$$\frac{x^2(3x-2)}{x^2} = (3x-2), \text{ se multiplica por } (-2).$$

$$\frac{x(6)+x^2(5)-(3x-2)(2)}{x^2(3x-2)} = \frac{6x+5x^2-6x+4}{x^2(3x-2)} = \frac{5x^2+4}{x^2(3x-2)}$$

$$7. \frac{2x+5}{x^2+6x+9} + \frac{x}{x^2-9} + \frac{1}{x-3} = \frac{2x+5}{(x+3)(x+3)} + \frac{x}{(x+3)(x-3)} + \frac{1}{x-3} = \frac{(2x+5)(x-3)+x(x+3)+(1)(x+3)^2}{(x+3)^2(x-3)} =$$

$$\frac{(2x^2-x-15)+(x^2+3x)+(x^2+6x+9)}{(x+3)^2(x-3)} = \frac{4x^2+8x-6}{(x+3)^2(x-3)} = \frac{2(2x^2+4x-3)}{(x+3)^2(x-3)}$$

Simplificar una fracción compleja:

$$8. \frac{1-\frac{2}{x+1}}{x-\frac{1}{x}} = \frac{\frac{(x+1)-2}{x+1}}{\frac{x^2-1}{x}} = \frac{\frac{x-1}{x+1}}{\frac{x^2-1}{x}} = \frac{\frac{x-1}{x+1}}{\frac{(x+1)(x-1)}{x}} = \frac{x(x-1)}{(x+1)(x+1)(x-1)} = \frac{x}{(x+1)^2}$$

Ejercicios (primera parte)

6. $\frac{4x^3-9x}{10x^4+11x^3-6x^2}$



5. $\frac{12y^2+3y}{20y^2+9y+1}$



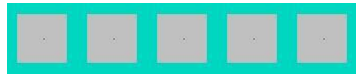
4. $\frac{6x^2-7x-5}{3x^2-2x-5}$



3. $\frac{(a^3b^3-2a^2b^4-15ab^5)}{ab^3}$



2. $\frac{2a^4b-4a^3b^2+2a^2b^3}{2a^2b}$



1. $\frac{9x^2-6xy-12y^2}{3xy}$



Ejercicios (segunda parte)

6. $\frac{\frac{6x-5}{3}+\frac{7}{2}}{\frac{1}{5}-\frac{2x-7}{3}}$



5. $\frac{\frac{x-1}{2}-\frac{1}{5}}{\frac{x+1}{5}}$



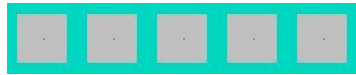
4. $\frac{x-3}{x^2-4x-5} - \frac{2x+1}{7x^3+2x^2-5x} + \frac{5x-3}{14x^3+115x-15}$



3. $\frac{5}{x^2-x-6} - \frac{3}{5x^2-14x-3} + \frac{1}{10x^2-13x-3}$



2. $\frac{5a^2+12a+4}{a^4-16} \div \frac{25a^2+20a+4}{a^2-2a}$



1. $\frac{a^2+4a+3}{3a^2+a-2} * \frac{3a^2-2a}{2a^2+13a+21}$



3.4. Propiedades de la igualdad

La igualdad la podemos ver como una balanza, para fines prácticos lo que nos interesa es cómo podemos manejar la igualdad en matemáticas. Principalmente queremos poder resolver ecuaciones.

Propiedades:

i) Aditiva: $a = b \Rightarrow a + c = b + c$

ii) Multiplicativa: $a = b \Rightarrow a * c = b * c$

iii) Operador: Si f es una función, $a = b \Rightarrow f(a) = f(b)$

En realidad con la última propiedad basta y lo que esencialmente dice es que si aplicamos cualquier operación a los dos lados de la igualdad, la igualdad se conserva. Por ejemplo podemos dividir, elevar al cuadrado, sacar raíz cuadrada, aplicar logaritmo, una función trigonométrica, etc.

3.5. Ecuaciones lineales

Para la solución de ecuaciones lineales fundamentalmente necesitamos: Las propiedades de los números y la propiedad aditiva y multiplicativa de la igualdad.

Dos ecuaciones son equivalentes si tienen la misma solución, y en ecuaciones lineales tenemos:

Propiedad Aditiva:

Si $p(x) = q(x)$ es una ecuación entonces $p(x) + c = q(x) + c$ es una ecuación equivalente.

Propiedad Multiplicativa:

Si $p(x) = q(x)$ es una ecuación y $c \neq 0$ entonces $p(x) * c = q(x) * c$ es una ecuación equivalente.

Nota: Como la resta es sumar el inverso y la división es multiplicar por el inverso si restamos o dividimos en ambos lados se obtiene una ecuación equivalente.

Una ecuación lineal tiene la forma $ax + b = 0$, sin embargo una ecuación puede tener una forma diferente y después de pasos algebraicos se puede ver que es lineal.

Como ya sabemos, resolver una ecuación es encontrar la solución, y es muy claro que la solución de una ecuación lineal de la forma $x = a$ es el número a . Por lo tanto para resolver una ecuación lineal la estrategia es realizar operaciones algebraicas y aplicar las propiedades de la igualdad para convertirla en una ecuación equivalente que tenga la forma $x = a$.

Ejemplo 1: Resolver la ecuación $5(x - 1) + 2 = 3(x + 2) - 1$

Primeramente efectuamos operaciones

$$5x - 5 + 2 = 3x + 6 - 1 \quad \text{o también} \quad 5x - 3 = 3x + 5$$

$$5x - 3 - 3x + 3 = 3x + 5 - 3x + 3 \quad \text{aplicando la propiedad aditiva}$$

$$2x = 8 \quad \text{por reducción de términos semejantes (Cancelación y Dilema del Mosquetero)}$$

$$\frac{2x}{2} = \frac{8}{2} \quad \text{por la propiedad multiplicativa}$$

$$x = 4 \quad \text{por cancelación y tenemos que la solución es el número 4.}$$

Ejemplo 2. Resolver la ecuación $\frac{1}{5} + \frac{2}{3}(x + \frac{1}{2}) = \frac{2}{5} - \frac{1}{2}(x + 3)$

$$\frac{1}{5} + \frac{2}{3}x + \frac{1}{3} = \frac{2}{5} - \frac{1}{2}x - \frac{3}{2} \quad \text{efectuando operaciones}$$

$$\frac{2}{3}x + \frac{8}{15} = -\frac{1}{2}x + \frac{-11}{10} \quad \text{simplificando}$$

$$\frac{2}{3}x + \frac{8}{15} + \frac{1}{2}x - \frac{8}{15} = -\frac{1}{2}x + \frac{-11}{10} + \frac{1}{2}x - \frac{8}{15} \quad \text{Propiedad aditiva}$$

$$\frac{2x}{3} + \frac{x}{2} = \frac{-11}{10} - \frac{8}{15} \quad \text{Cancelación}$$

$$\frac{4x + 3x}{6} = \frac{-33 - 16}{30} \quad \text{operaciones con fracciones, o también} \quad \frac{7x}{6} = \frac{-49}{30}$$

$$\frac{6}{7} * \frac{7x}{6} = \frac{6}{7} * \frac{-49}{30} \quad \text{propiedad multiplicativa}$$

$$x = \frac{-7}{5} \quad \text{cancelación.}$$

Ejercicio. Resolver las ecuaciones siguientes:

$$6. \quad \frac{3}{4} \left(\frac{x}{2} + \frac{1}{5} \right) - \frac{3}{2} = \frac{1}{3} - \frac{2}{3} \left(\frac{x}{2} + \frac{3}{4} \right)$$

$$5. \quad \frac{1}{2} + 3 \left(\frac{x}{2} + 5 \right) = \frac{3}{4} + 5 \left(\frac{x}{3} - 1 \right)$$

$$4. \quad 3 + 5 \left(x + \frac{1}{2} \right) = \frac{1}{2} - 3 \left(x - \frac{1}{3} \right)$$

$$3. \quad x + 5 = 3(2x - 1) + 4$$

$$2. \quad 4 + 5(3x - 1) = 2(x - 3) - 2$$

$$1. \quad 5(x - 1) + 2 = 3(x + 2) - 1$$

3.6. Ecuaciones cuadráticas

Una ecuación cuadrática tiene la forma $ax^2 + bx + c = 0$, llamada Forma General de la Cuadrática y veremos esencialmente dos formas de resolverla. Primeramente debemos realizar operaciones y aplicar propiedades de la igualdad para llevarla a la forma general.

Primeramente veremos el Método por Factorización, para este utilizamos la propiedad:

$$a * b = 0 \Rightarrow a = 0 \text{ ó } b = 0$$

Ejemplos. Resolver

$$1. \quad 5x^2 - 25x = 0$$

Factorizando obtenemos $5x(x - 5) = 0$

por lo tanto $5x = 0$ ó $x - 5 = 0$

por lo que $x = 0$ ó $x = 5$ y estas son las dos raíces de la ecuación.

$$2. \quad x^2 - x - 6 = 0$$

Factorizando obtenemos $(x - 3)(x + 2) = 0 \Rightarrow x - 3 = 0$ ó $x + 2 = 0$

por lo que $x = 3$ ó $x = -2$ y estas son las dos raíces de la ecuación.

$$3. \quad 10x^2 + 13x - 3 = 0$$

Factorizando obtenemos $(5x - 1)(2x + 3) = 0 \Rightarrow 5x - 1 = 0$ ó $2x + 3 = 0$

por lo que $x = \frac{1}{5}$ ó $x = -\frac{3}{2}$ y estas son las dos raíces de la ecuación.

El segundo método es utilizando la **Fórmula General de la Ecuación Cuadrática**:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Ejemplo: Resolver $x^2 - x - 1 = 0$

Aplicando la Fórmula tenemos:

$$x = \frac{-(-1) \pm \sqrt{(-1)^2 - 4(1)(-1)}}{2(1)} = \frac{1 \pm \sqrt{1+4}}{2} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

son $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ y $\frac{1-\sqrt{5}}{2}$ por lo que las dos raíces

Ejercicio. Resolver las ecuaciones siguientes:

6. $3x^2 + 2x + 5 = 0$



5. $2x^2 + 5x - 1 = 0$



4. $x^2 + 2x - 4 = 0$



3. $6x^2 - 7x + 2 = 0$



2. $3x^2 + 2x - 1 = 0$



1. $x^2 - 2x - 10 = 0$



4. Representación gráfica de funciones

En la vida diaria una persona tiene contacto con el concepto de función muy seguido, por ejemplo. El costo de la electricidad que consume, lo que paga en la gasolinera, la paridad peso-dólar, etc. Es tan importante este concepto que prácticamente podríamos decir que no hay un lugar en la vida moderna donde no esté presente. Las compañías de seguros, las empresas automotrices, y casi toda la economía actual se maneja en respuesta a las funciones que rigen su operación. En el área de ingeniería también es de particular importancia en la mayoría de las aplicaciones.

Es por lo tanto de particular importancia que un alumno tenga un dominio del concepto y sepa analizar, representar y manipular las funciones.

COMPETENCIA DE LA UNIDAD

Reconoce, identifica los puntos fundamentales y grafica una función.

COMPETENCIAS ESPECÍFICAS

Reconoce las funciones elementales. Identifica los puntos y elementos fundamentales de una función. Encuentra el dominio y el rango de una función. Maneja con pericia GeoGebra.

ACTIVIDADES

Prácticas de Laboratorio (en coordinación con el curso de Competencia Digital).
Elabora un resumen de los tipos de funciones y sus gráficas y los sube a su sitio.

EVALUACIÓN

Examen escrito. Revisión del *Site*. Examen en la computadora

Como vimos en la Unidad 1, una función es un conjunto de pares ordenados (x,y) , cuyo primer elemento no se repite. Las funciones reales se pueden graficar en el Plano Cartesiano (dos rectas numéricas perpendiculares). En muchos de los casos conocemos una fórmula que relaciona y con x , en este caso se usa la notación $y = f(x)$ y para hacer la gráfica conviene encontrar algunos puntos de la función.

Como se conoce la fórmula, prácticamente podemos encontrar el punto que queremos dándole valor a x , pero conviene seleccionar adecuadamente los puntos según el tipo de función para hacer la gráfica de una manera más eficiente.

4.1. Función Lineal

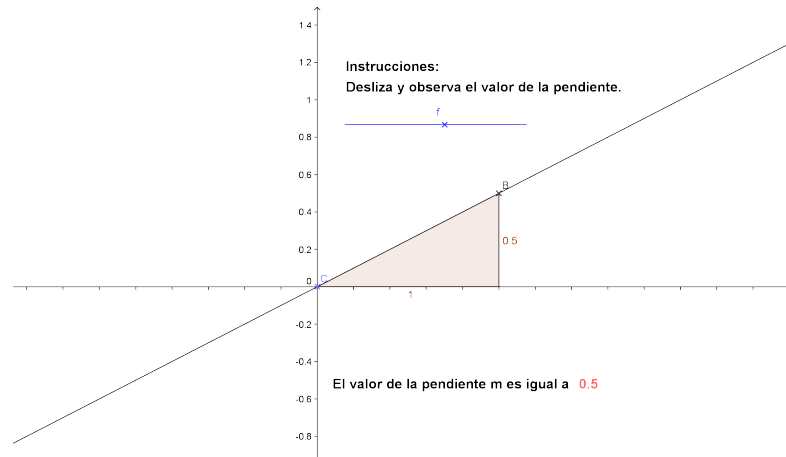
La función lineal es de la forma $f(x) = mx + b$, donde m representa la pendiente (inclinación) y b representa la intersección de la recta con el eje y (cuando el valor de $x = 0$) se le llama *ordenada en el origen*. La pendiente m puede ser positiva (sube), negativa (baja) o cero (recta horizontal).

Cuando $b = 0$ tenemos la función $f(x) = mx$ que nos representa una función que pasa por el origen $(0,0)$.

La pendiente viene a ser intuitivamente “lo que sube o baja la recta entre lo que avanza”.

$$m = \frac{\text{lo que sube (baja)}}{\text{lo que avanza}}$$

En la siguiente gráfica observamos cómo el valor de la pendiente es igual a 0.5 positivo, resultado de avanzar una unidad y subir 0.5 unidades.



4.1.1. Graficación de la función lineal

Para graficar la función es suficiente con cualquier par de puntos

Ejemplo. $f(x) = 3x - 6$

$$x = 0 \Rightarrow y = f(0) = -6, \quad x = 1 \Rightarrow y = f(1) = 3(1) - 6 = -3$$

Estos valores los podemos poner en una tabla (tabulación)

x	y
0	-6
1	-3

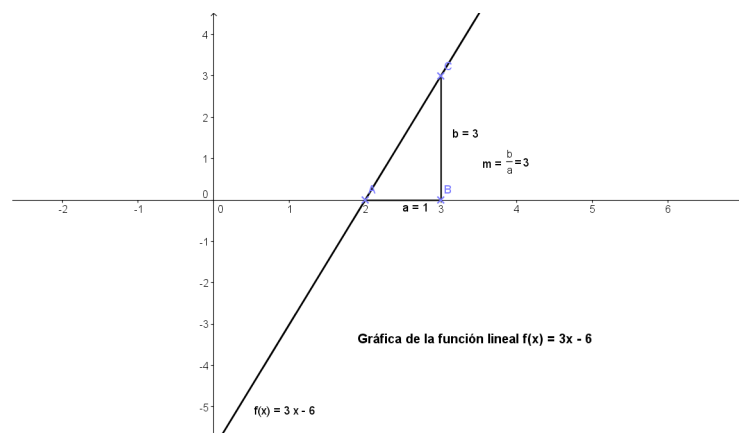
Como pueden ser cualquier par de puntos, una costumbre (cuando la función no pasa por el origen) es encontrar las intersecciones con los ejes.

$$x = 0 \Rightarrow y = f(0) = -6, \quad y = 0 \Rightarrow 3x - 6 = 0 \Rightarrow x = 2$$

x	y
0	-6
2	0

Por supuesto que podemos poner todos los puntos que queramos en la tabulación, pero para la línea recta con dos es suficiente.

Podemos también encontrar el valor de la pendiente: $m = \frac{3}{1} = 3$, pendiente positiva o sea que sube 3 unidades en y por cada unidad que avanza de x .



Vea la figura anterior y observe los valores calculados previamente y su posición en la gráfica.

Baje el siguiente archivo llamado pendiente.ggb de GeoGebra para ver el comportamiento de la función con diferentes valores de la pendiente.

Ejemplos:

Encuentre con el método desarrollado anteriormente los puntos característicos y las gráficas de las funciones siguientes, corrobore sus resultados usando el software GeoGebra. Identifique los valores de b y m , comente lo que sucede cuando los valores son positivos o negativos:

6. $y = -\frac{1}{2}x - \frac{2}{3}$



5. $f(x) = -5x + \frac{1}{4}$



4. $y = -\frac{1}{2}x + 4$



3. $f(x) = 3x - \frac{2}{5}$



2. $3x + 2y = 12$



1. $f(x) = -2 + 3x$

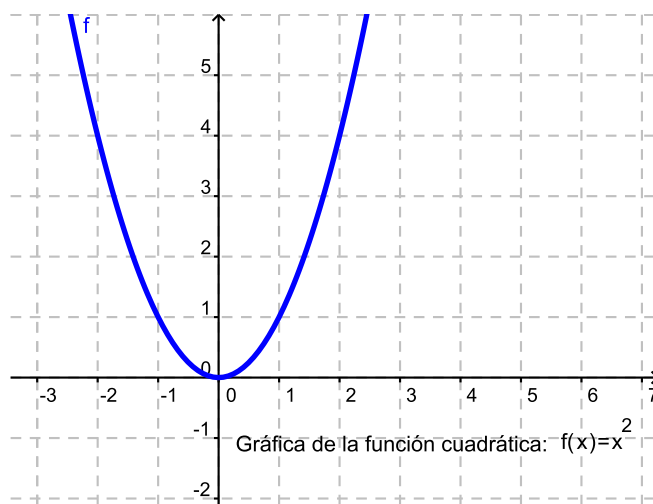


4.1.2. Dominio y Rango de la Función Lineal.

Esta función como podemos observar en la gráfica es válida para todos los valores de x , por lo tanto $D_f = (-\infty, \infty)$, los parentesis indican que el intervalo es abierto. y el rango $R_f = (-\infty, \infty)$ es igual al dominio (excepto cuando $m = 0$, en cuyo caso $R_f = \{b\}$).

4.2. Función Cuadrática.

La función cuadrática tiene la forma general: $f(x) = ax^2 + bx + c$. El caso más simple es cuando $a = 1$, $b = 0$, $c = 0$ es decir, $f(x) = x^2$ que representa una parábola que pasa por el origen $(0,0)$. Su gráfica es la siguiente.



El vértice de coordenadas $(0,0)$ abriéndose hacia arriba de manera simétrica al eje y , con dominio $D_f = (-\infty, \infty)$ donde el " $($ " indica un intervalo abierto, es decir que el valor no se incluye en él, y rango $R_f = [0, \infty)$, donde el " $[$ " indica que el intervalo es cerrado, es decir que el cero está incluido.

Retomando la forma general, vemos que en esta función se pueden identificar algunas características generales conociendo algunos parámetros, como por ejemplo el valor del coeficiente principal (es decir el de la variable cuadrática) y el discriminante $b^2 - 4ac$.

Donde el valor de a puede ser

$$\begin{cases} a > 0 & \text{parábola abre hacia arriba} \\ a < 0 & \text{parábola abre hacia abajo} \end{cases}$$

y el discriminante que nos permite saber cuántas veces la gráfica de la parábola cruza el eje x .

Observemos la gráfica anterior donde la parábola corta al eje x en un solo punto "el origen"; pero cuando los valores de b y c son distintos de cero, las coordenadas del vértice de la parábola se pueden ubicar en cualquier parte del plano. Y dependiendo de su posición es que pueden o no cortar al eje x . Una manera de saber si la gráfica de la parábola interseca al eje x o no, es con el uso del discriminante.

Que puede tener tres casos.

$$\begin{cases} b^2 - 4ac > 0 & \text{corta en dos puntos al eje } x \\ b^2 - 4ac = 0 & \text{corta en un punto al eje } x \\ b^2 - 4ac < 0 & \text{no corta al eje } x \end{cases}$$

En el primer caso si el valor obtenido del discriminante es racional; se puede factorizar con los métodos estudiados en la unidad anterior, en caso contrario se tiene que usar la fórmula general. Por último para hacer una buena gráfica de una función cuadrática (parábola) es conveniente conocer su vértice, este se encuentra en $V = (h,k)$ y se obtiene de la siguiente forma: $h = \frac{-b}{2a}$ $k = f(h) = a(h)^2 + b(h) + c$, o sea que para encontrar k , se sustituye el valor de h en la función original.

Ejemplo. Graficar $f(x) = x^2 - 6x + 8$

$x^2 - 6x + 8 = 0$ se iguala a cero para encontrar las intersecciones con el eje x .

$(x - 4)(x - 2) = 0$ resolviendo para cada factor se obtiene

$x = 4, x = 2$

$f(0) = 0^2 - 6(0) + 8 = 8$ la intersección con $y = 8$

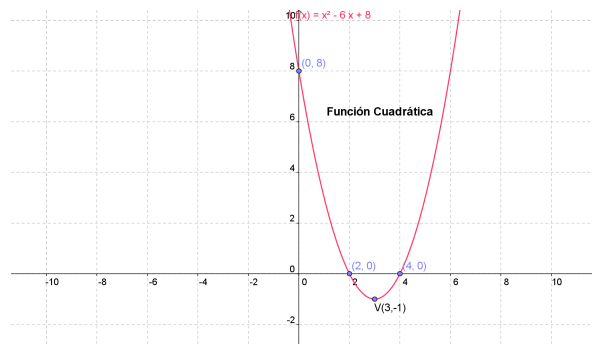
El valor del vértice:

$$h = \frac{-(-6)}{2(1)} = \frac{6}{2} = 3$$

$$f(3) = 3^2 - 6(3) + 8 = -1 = k$$

Las coordenadas de V son (3, -1)

x	y
2	0
3	-1
4	0



$$D_f = (-\infty, \infty), \quad R_f = [-1, \infty).$$

Ejemplo. Graficar $f(x) = x^2 + 6x + 12$

Vemos que calculando el discriminante tenemos

$$b^2 - 4ac = 6^2 - 4(1)(12) = 36 - 48 = -12. \text{ Por tanto, no hay intersección con el eje } x.$$

En este caso podemos encontrar los puntos donde la parábola interseca el eje y

$$x^2 + 6x + 12 = 12 \text{ Cancelando}$$

$$x^2 + 6x + 12 + (-12) = 12 + (-12)$$

$$x^2 + 6x = 0$$

$$x(x + 6) = 0 \text{ encontrando los valores}$$

$$x = 0 \quad y \quad x = -6 \text{ que son los valores donde } y = 12.$$

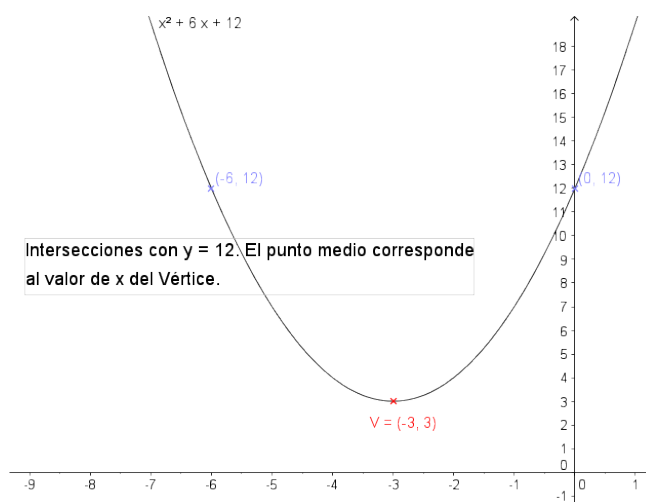
Procedemos a encontrar las coordenadas del Vértice.

$$h = \frac{-b}{2a} = \frac{-6}{2} = -3$$

$$f(h) = (-3)^2 + 6(-3) + 12 = 9 - 18 + 12 = 3$$

$$V = (-3, 3)$$

Vea la siguiente gráfica en la que se muestran los puntos que acabamos de encontrar, además de que es posible observar cómo la parábola no interseca el eje x .



4.2.1. Dominio y Rango de la Función Cuadrática

Dependiendo si la parábola abre hacia arriba o hacia abajo, el vértice nos representa en valor mínimo o máximo respectivamente, lo que determina el valor del Rango. Es decir si el vértice es un mínimo el rango es $R_f = [h, \infty)$ y si es un máximo $R_f = (-\infty, h]$.

El valor del dominio en una función cuadrática y en general en cualquier función polinómica es $D_f = (-\infty, \infty)$.

4.3. Función Raíz.

De la función raíz vamos a trabajar con dos tipos.

Raíz Lineal

$$f(x) = \sqrt{ax + b}$$

Raíz Cuadrática

$$f(x) = \sqrt{ax^2 + bx + c}$$

4.3.1. Raíz Lineal

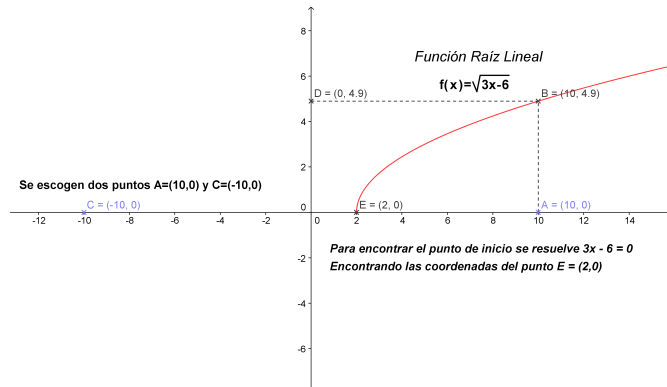
La raíz lineal como función se grafica como una media parábola y dependiendo del valor de a es como esta se abre, ya sea, hacia la derecha ($a > 0$) o izquierda ($a < 0$).

El punto de intersección con el eje x , lo obtenemos al resolver la expresión $ax + b = 0$, es decir $x = -\frac{b}{a}$. Después tomaremos otros dos puntos uno a la derecha y otro a la izquierda del valor encontrado de x ; si el resultado es negativo, estaría fuera de su dominio, de acuerdo a las propiedades de la raíz cuadrada. Si por el contrario el resultado de sustituir el punto escogido es positivo, se grafica y se supone que la función se continúa a lo largo del eje x , hasta el infinito.

Ejemplo.

Sea $f(x) = \sqrt{3x - 6}$ al resolver para x , $3x - 6 = 0$ encontramos que $x = 2$. Ahora escogemos dos puntos 10 y -10 y los sustituimos. $f(10) = \sqrt{3(10) - 6} = \sqrt{24} \approx 4.9$ y $f(-10) = \sqrt{3(-10) - 6} = \sqrt{-36}$, como se ve al sustituir el valor 10 positivo, el resultado de la raíz es válido en \mathbb{R} , no así para $x = -10$.

Ver gráfica siguiente.



4.3.2. Función Raíz Cuadrática

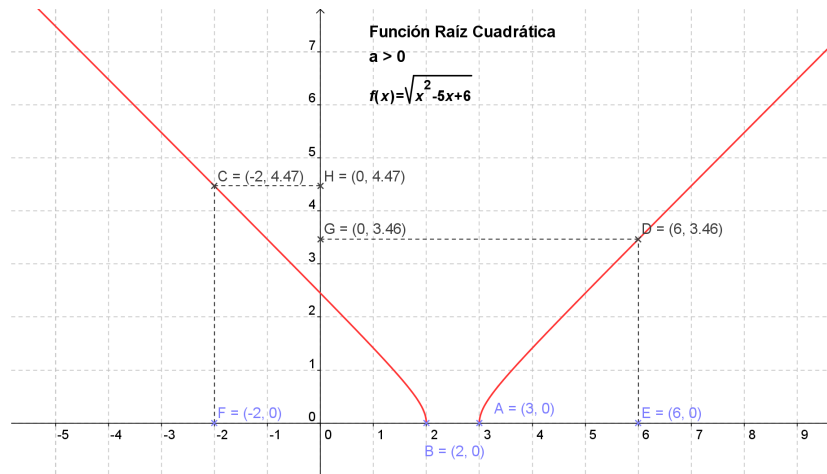
Diferente a la raíz lineal, la raíz cuadrática se grafica de dos formas, como una media hipérbola ($a > 0$).

Para encontrar los valores de inicio resolvemos $ax^2 + bx + c = 0$ encontrando dos puntos que corresponden a las coordenadas de inicio de las hipérbolas. para identificar la tendencia de las gráficas tomaremos otros dos valores, uno mayor que el punto de inicio de la hipérbola que abre a la derecha y el otro menor que el punto de inicio de la hipérbola que abre hacia la izquierda.

Ejemplo

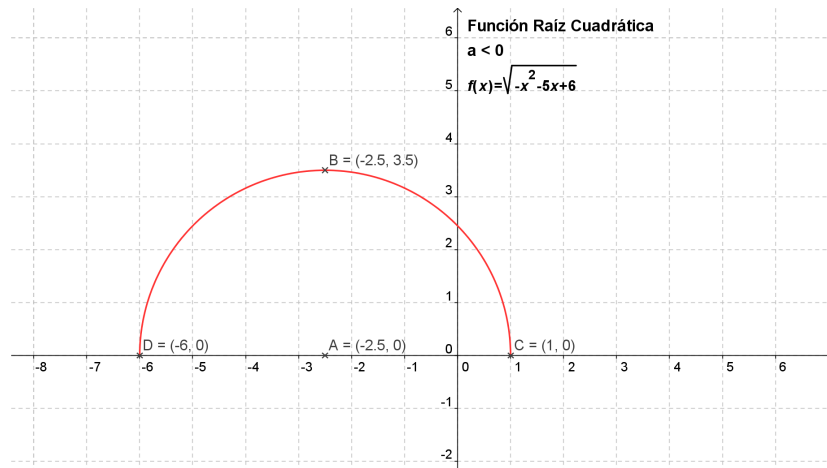
Sea la función $f(x) = \sqrt{x^2 - 5x + 6}$. En este caso resolvemos primero $x^2 - 5x + 6 = 0 \Rightarrow (x - 3)(x - 2) = 0$ de donde se ve que los valores son $x = 3$ y $x = 2$. Que corresponden a las coordenadas de los puntos A y B de la gráfica. Se seleccionan otros dos puntos arbitrarios en este caso el punto $F = (6, 0)$ y el punto $G = (-2, 0)$ encontrando sus correspondientes ordenadas.

Con $x = 6$ tenemos $f(6) = \sqrt{6^2 - 5(6) + 6} \approx 3.46$ encontrando las coordenadas del punto $D = (6, 3.46)$ y con $x = -2$ se obtiene $f(-2) = \sqrt{(-2)^2 - 5(-2) + 6} \approx 4.47$ que definen las coordenadas del punto $C = (-2, 4.47)$. como se puede apreciar en la siguiente gráfica.



El otro caso cuando el valor de $a < 0$ nos da como resultado la gráfica de una media elipse con valor máximo a la mitad de las coordenadas de los puntos de inicio y termino de la misma. Para encontrar estos puntos procedemos de la misma forma que lo hicimos en el caso anterior, es decir resolvemos $-ax^2 + bx + c = 0$ encontrando las raíces y el punto medio como se mencionó anteriormente, es el valor máximo de la misma.

Veamos un ejemplo.



Sea la función $f(x) = \sqrt{-x^2 - 5x + 6}$. Resolviendo $-x^2 - 5x + 6 = 0 \implies (x + 6)(x - 1) = 0$ de donde se obtienen las coordenadas de los puntos $C = (1, 0)$ y $D = (-6, 0)$ el valor medio de estos puede encontrarse con la fórmula $h = \frac{-b}{2a} = \frac{-(-5)}{2(-1)} = \frac{5}{-2} = -2.5$, encontrando la abscisa de $A = (-2.5, 0)$ correspondiente a un valor de y igual a $f(-2.5) = \sqrt{(-2.5)^2 - 5x + 6} = 3.5$ que proporciona la ordenada de $B = (-2.5, 3.5)$ con estos puntos trazamos una media elipse. Ver gráfica anterior.

4.3.3. Dominio y Rango de la Función Raíz

En el caso de la función raíz lineal, los valores de x para los que la función está definida dependen de la forma de la gráfica, si la media parábola abre hacia la derecha. el dominio

incluye dicho valor y todos los valores mayores que éste, $D_f = [2, \infty)$ y el Rango los valores mayores que cero, $R_f = [0, \infty)$. En caso contrario, es decir, que la parábola abra hacia la izquierda, los valores del dominio incluyen al valor de inicio de la parábola y todos los menores a este. Suponiendo que el valor fuera $x = -1$. El dominio será $D_f = (-\infty, -1]$ y el rango es similar al anterior $R_f = [0, \infty)$.

Para la función raíz cuadrática en la que el valor de $a > 0$, Donde las hipérbolas abren hacia afuera, vease la gráfica del ejemplo. El dominio es $D_f = (-\infty, 2] \cup [3, \infty)$ y el rango es de $R_f = [0, \infty)$ y para la función raíz con $a < 0$ cuya gráfica es una media elipse, el valor del dominio es $D_f = [-6, 1]$ y el rango $R_f = [0, 3.5]$.

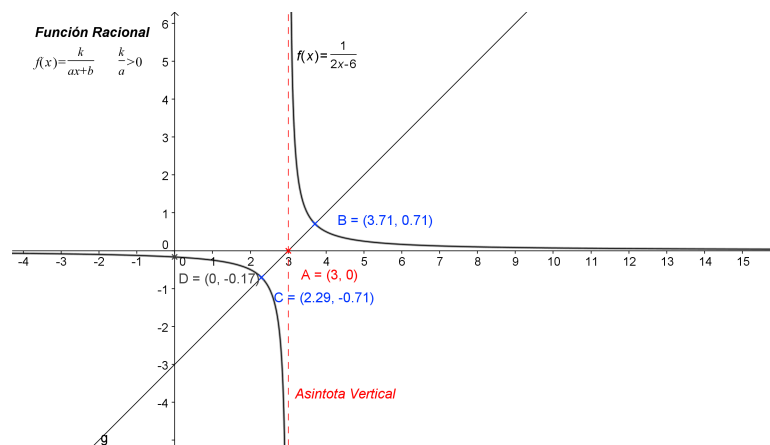
4.4. Función Racional.

Esta función es de la forma $f(x) = \frac{N(x)}{Q(x)}$ donde $Q(x) \neq 0$ y $N(x)$, $Q(x)$ son polinomios de cualquier grado. Para la graficación de estos se hacen necesarios conceptos que se verán en el curso de Cálculo Diferencial.

En este curso propedéutico veremos solamente los casos donde el numerador es una constante k y el denominador es una función lineal o cuadrática.

4.4.1. Función Racional Lineal

Esta función $f(x) = \frac{k}{ax+b}$ tiene dos casos especiales, el caso $\frac{k}{a} > 0$ y $\frac{k}{a} < 0$.



La gráfica anterior corresponde al primer caso; para graficar esta función necesitamos encontrar en primer lugar el punto correspondiente a la asíntota vertical.

Este punto es aquel en el que el denominador se hace cero por tanto para calcularlo, igualemos el denominador a cero y resolvamos para x .

Después, hay que encontrar los vértices de la hipérbola; para esto, trazamos la bisectriz entre las asíntotas vertical y horizontal, debido a que el ángulo entre éstas es 90° , la bisectriz es una recta a 45° que pasa por el punto de intersección de las asíntotas.

La ecuación de esta recta, la igualamos con la función original, y se resuelve para las x 's. Estos puntos los sustituimos en la función original o en la ecuación de la recta y encontramos las ordenadas.

Por último podemos encontrar la intersección con el eje y .

Veamos un ejemplo:

Sea la función $f(x) = \frac{1}{2x-6}$. La asíntota vertical se encuentra en el punto donde $2x - 6 = 0 \Rightarrow x = 3$, veamos la gráfica y observemos que este punto correspondiente a $A = (3, 0)$

Después obtenemos la ecuación de la recta bisectriz, $y = x - 3$ igualando las funciones para encontrar el punto de intersección

$$\frac{1}{2x-6} = x - 3 \text{ cancelando } x - 3 \text{ tenemos}$$

$$\frac{1}{2x-6} - x + 3 = 0 \text{ tomando denominador común}$$

$\frac{1-x(2x-6)+3(2x-6)}{2x-6} = \frac{1-2x^2+6x+6x-18}{2x-6} = 0$ cancelando $2x - 6$ y multiplicando por (-1) obtenemos:

$2x^2 - 12x + 17 = 0$ usando la llamada fórmula general encontramos que $x_1 \approx 2.29$ y $x_2 \approx 3.71$, se sustituyen en

$y = x - 3 = 2.29 - 3 = -0.71$ obteniéndose el punto $C = (2.29, -0.71)$ el otro punto lo encontramos al sustituir

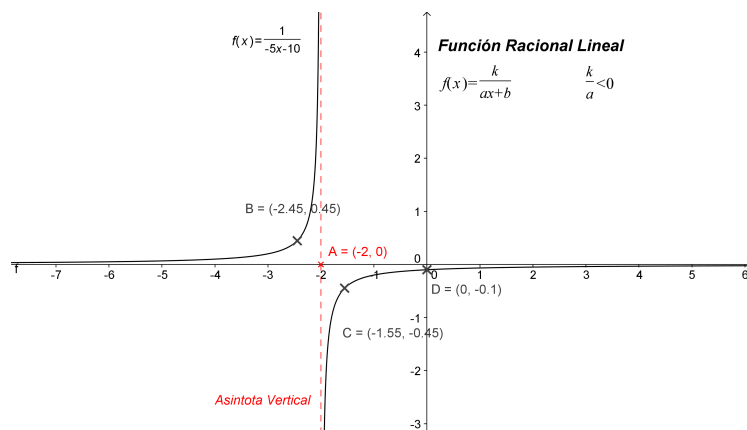
$y = 3.71 - 3 = 0.71$, lo que permite encontrar las coordenadas del punto $B = (3.71, 0.71)$

La intersección con el eje y la encontramos sustituyendo $x = 0$ en la función original.

$$f(0) = \frac{1}{2(0)-6} = \frac{1}{-6} = -0.17, \text{ encontrando las coordenadas del punto } D = (0, -0.17)$$

El segundo caso.

Se resuelve de manera similar pero al graficar se invierte la hipérbola.

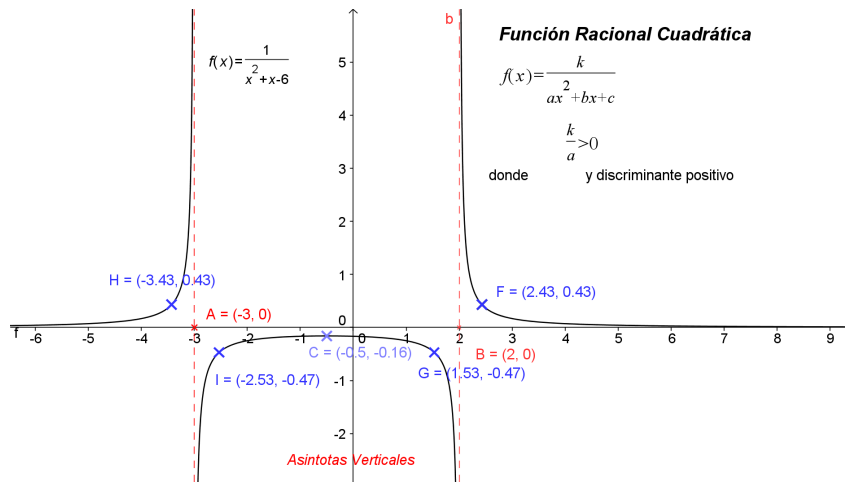


4.4.2. Función Racional Cuadrática

Son de la forma $f(x) = \frac{k}{ax^2+bx+c}$; se verán dos casos, similar a la racional lineal $\frac{k}{a} > 0$ y $\frac{k}{a} < 0$. Otra condición es que el *discriminante* sea positivo en ambos casos.

El método de solución es similar al de la función racional lineal sólo que, en este tipo de funciones como el denominador es una función de segundo grado, se tienen dos raíces, por tanto son dos asíntotas verticales.

Veamos la gráfica siguiente.



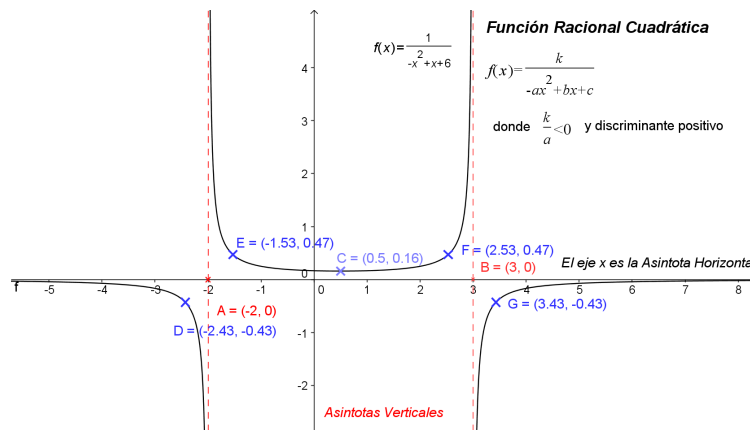
Tenemos que la función es $f(x) = \frac{1}{x^2+x-6}$ al resolver el denominador se observa que los valores son $x = -3$ y $x = 2$, los que permiten encontrar los puntos A y B que son los puntos en el eje x , donde cruzan las asíntotas verticales. El punto medio de la parte cuadrática que es el máximo valor, lo obtenemos calculando el punto medio entre los dos valores que obtuvimos o bien con la fórmula $x_m = \frac{-b}{2a} = \frac{-1}{2} = -0.5$, la ordenada la obtenemos sustituyendo este valor en la función original.

$$f(-0.5) = \frac{1}{(-.5)^2+.5-6} \approx -0.16 \text{ por lo tanto } C = (-0.5, -0.16).$$

Debido a que encontrar los puntos F, G, H e I , resulta en cálculos muy complicados se deja como opcional.

El segundo caso donde $\frac{k}{a} < 0$ se resuelve de manera similar.

Veamos la gráfica de la función $f(x) = \frac{1}{-x^2+x+6}$



Los comentarios y cálculos para esta gráfica son similares a los de la anterior.

4.4.3. Dominio y Rango de las funciones Racionales.

En las funciones racionales el dominio incluye todos los valores de x excepto en los que la función es indeterminada. Y el rango se comporta de igual manera. Los valores donde la

función es indeterminada es en los puntos donde encontramos asíntotas verticales. Para el rango los valores son todos excepto el que corresponde a la asíntota horizontal.

De los ejemplos.

En primer caso $D_f = (-\infty, 3) \cup (3, \infty)$ y el rango $R_f = (-\infty, 0) \cup (0, \infty)$

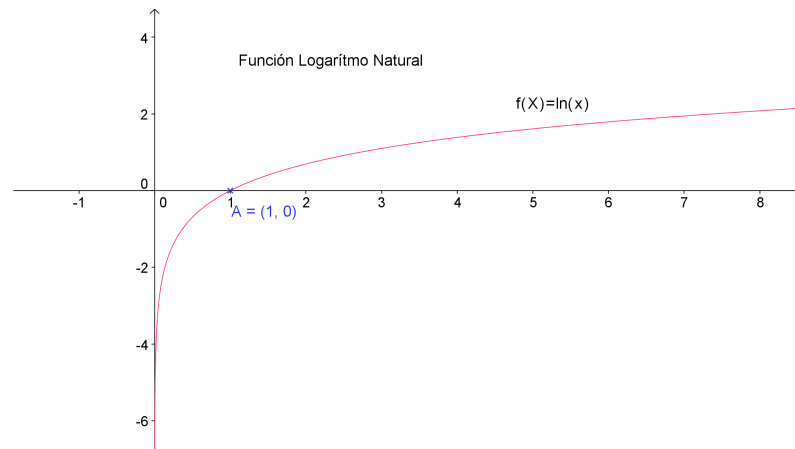
El segundo caso $D_f = (-\infty, -2) \cup (-2, \infty)$, el rango es similar al anterior.

El tercer caso $D_f = (-\infty, -3) \cup (-3, 2) \cup (2, \infty)$, el rango es similar al anterior.

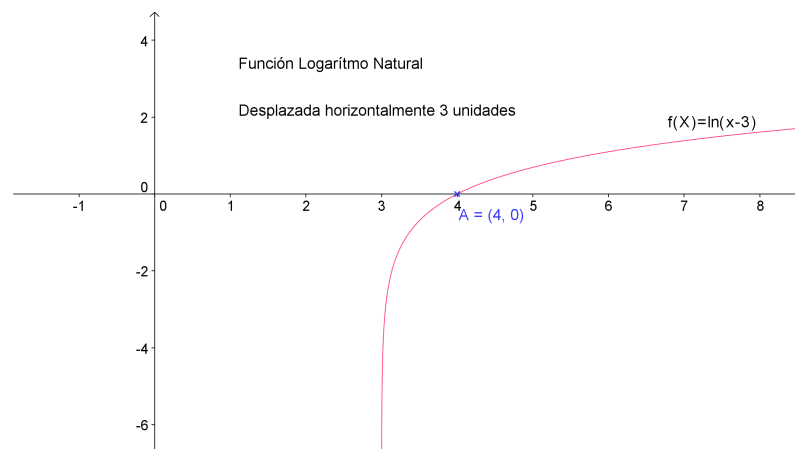
En el cuarto caso $D_f = (-\infty, -2) \cup (-2, 3) \cup (3, \infty)$ y el rango similar a los otros casos.

4.5. Función Logaritmo Natural

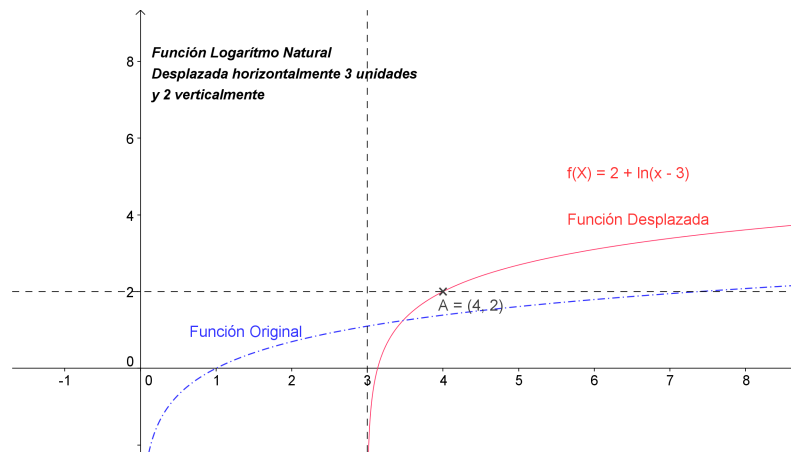
De la forma $f(x) = k + \ln(x - p)$ donde k representa el desplazamiento vertical y p el desplazamiento horizontal. Tiene como caso más simple cuando $k = p = 0$ es decir, $f(x) = \ln(x)$ y cuyo dominio es $D_f = (0, \infty)$ y que el valor para $x = 1$ es $\ln(1) = 0$ tiene una gráfica como la siguiente:



La siguiente gráfica nos muestra la función desplazada horizontalmente a la derecha en tres unidades, la ecuación es $f(x) = \ln(x - 3)$, en esta el dominio es $D_f = (3, \infty)$

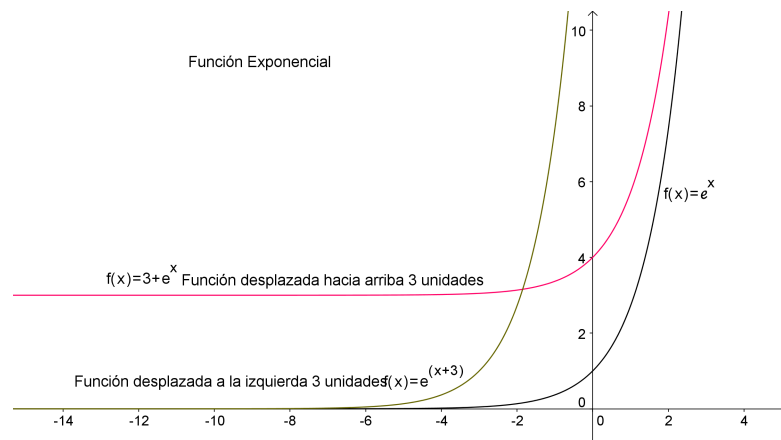


Por último veamos la misma gráfica pero además de las 3 unidades desplazadas horizontalmente tenemos 2 unidades desplazadas verticalmente hacia arriba. La ecuación de la función es $f(x) = 2 + \ln(x - 3)$.



4.6. Función Exponencial

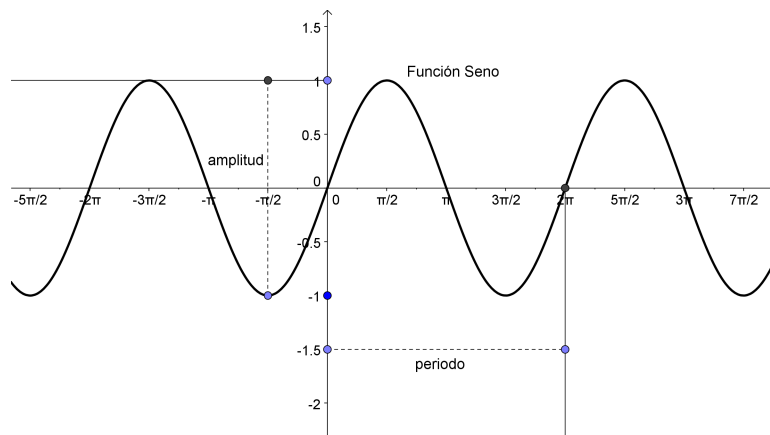
De la forma $f(x) = k + e^{(x+p)}$ que de igual manera que en la función logaritmo, la k representa un desplazamiento vertical, hacia arriba si $k > 0$ y hacia abajo si $k < 0$ y $p > 0$ un desplazamiento horizontal a la izquierda y a la derecha si $k < 0$; el dominio de la función exponencial es $D_f = (-\infty, \infty)$ y el rango es de $R_f = (k, \infty)$. Veamos la siguiente gráfica.



4.7. Funciones Trigonómicas.

Dentro de las funciones trigonométricas veremos únicamente la función seno, $f(x) = \text{sen}(x)$, cuyos valores están asociados al círculo trigonométrico que se discutirá en capítulos

posteriores. Por el momento lo importante es reconocerla y remarcar que el dominio de la función es de $D_f = (-\infty, \infty)$ con un comportamiento periódico, es decir, que los valores se repiten con período 2π , y que el rango, denominado amplitud es $R_f = [-1, 1]$, ver la gráfica siguiente.



5. Lógica y Razonamiento

Una de las herramientas más importantes de las matemáticas es la lógica, porque nos ayuda para argumentar nuestras respuestas y a comprobar si lo que proponemos es correcto. Aparte de la utilidad en matemáticas, la lógica nos ayuda a estructurar nuestras ideas y a establecer argumentos y conclusiones de una manera formal y ordenada. Muchas veces en la vida cotidiana se nos presentan situaciones aparentemente complejas y que parece difícil el poder establecer una conclusión; pero con un simple análisis se puede convertir en una situación muy sencilla.

En este tema analizaremos las formas más comunes de razonamiento y argumentación, principalmente en el área de matemáticas. Cuándo es posible establecer una conclusión y por qué es válida. Es importante que el alumno se acostumbre a argumentar sus acciones y procedimientos, no solamente en matemáticas sino en cualquier otra materia y en sus actividades diarias. Además se presenta una manera formal de establecer una demostración.

COMPETENCIA DE LA UNIDAD

Utiliza la inferencia deductiva para argumentar sus acciones en la vida diaria.

COMPETENCIAS ESPECÍFICAS

Desarrolla una demostración completa. Establece un argumento. Conoce los casos Modus Ponendo Ponens y Modus Tollendo Tollens. Acostumbra argumentar sus disertaciones.

ACTIVIDADES

Elaborar una cartulina con las inferencias deductivas fundamentales. Presentación de una demostración detallada paso a paso. Escribir en el sitio un resumen con las observaciones propias.

EVALUACIÓN

Examen escrito. Revisión del *sitio*.

5.1. Inferencia

Entendemos por inferencia cualquier proceso mediante el cual se obtienen conclusiones en base a la información conocida. Un argumento, por ejemplo es una inferencia, donde las premisas son los datos o expresiones conocidas y de ellas se desprende una conclusión. Una inferencia puede ser: Inductiva, Deductiva, Transductiva o Abductiva.

Inductiva (de lo particular a lo general)

Este es el caso en el que, debido a varias observaciones se formula una regla general o incluso una teoría. Aquí por ejemplo, si durante la primera semana el maestro llega 10 minutos tarde, podemos concluir que todo el semestre va a llegar tarde. Esta conclusión no necesariamente es válida porque puede ser que el maestro algún día llegue temprano. En general una inferencia inductiva es la que se desprende de una o varias observaciones y en general no podemos estar seguros de que será verdadero lo que concluimos. En este caso podemos mencionar el ejemplo del mentiroso: Un joven le dice a un amigo, tú todos los días dices mentiras; y el contesta, no es cierto, ayer en todo el día no dije una sola mentira. Resumiendo, la inferencia inductiva es la ley general que se obtiene de la observación de uno o más casos y no se puede asegurar con certeza de que sea cierta, pero la verificación de más casos particulares y el conocimiento del tema hacen que la teoría propuesta sea cada vez más creíble.

La inducción es un caso muy importante de razonamiento ya que permite crear hipótesis y es como los investigadores generan las nuevas teorías. Para mayor información puede visitar el URL: <http://www.mitecnologico.com/Main/EjemploInferenciaInductiva>

Deductiva (de lo general a lo particular)

Cuando se conoce una ley general y se aplica a un caso particular, por ejemplo se sabe que siempre que llueve hay nubes, concluimos que el día de hoy que está lloviendo hay nubes. También se conoce como inferencia deductiva cuando tenemos un caso que analiza todos los posibles resultados y de acuerdo a las premisas sólo hay una posible situación, en este caso decimos que la situación única es la conclusión. Así que estamos seguros de que si las premisas son verdaderas entonces la conclusión también lo es.

En este caso entran MPP y MTT y se puede hacer una tabla con todos los posibles casos, llamada tabla de verdad, donde se ven las dos formas válidas de establecer una inferencia válida. La inferencia deductiva es la única aceptada como válida en lógica y matemáticas para hacer comprobaciones y sacar conclusiones, por tal razón se le dedica una sección completa en estas notas.

Transductiva (de particular a particular o de general a general)

Con el mismo caso del maestro que llega tarde durante los primeros días y concluimos que el lunes siguiente también llegará tarde. O del amigo que varias veces nos ha mentado y concluimos que lo que nos dice es ese momento es mentira.

El anterior sería de particular a particular, un caso de general a general es por ejemplo de un compañero maestro que la primera vez que impartió matemáticas discretas observó que todos sus alumnos estudiaban mucho, concluyó que para el siguiente semestre todos los alumnos iban a estudiar. Esta es la situación donde, como en el caso inductivo, no podemos estar seguros de que la conclusión es verdadera.

Abductiva (Propone una serie de posibles hipótesis sobre un hecho)

Es semejante a la deductiva, también utiliza la estrategia de analizar todas las posibilidades, pero esta vez hay varios casos que se pueden presentar, como por ejemplo si se sabe que siempre que llueve hay nubes y se sabe que hay nubes se puede concluir que llueve, pero no se tiene la certeza, al igual que el caso inductivo y transductivo no es una forma válida de obtener conclusiones en matemáticas o en lógica y es necesario conocer más información para poder verificar la validez. Con la abducción, así como con el proceso inductivo se pueden crear nuevas teorías y muchas veces se debe a la experiencia o conocimiento sobre el que se está haciendo la inferencia.

Se recomienda la lección "Tres Tipos de Razonamiento", de Charles S. Peirce, que puede encontrar (a la fecha) en el siguiente URL:

<http://www.unav.es/gep/OnThreeTypesReasoning.html>.

5.2. Deducción

La deducción o inferencia deductiva, es el único razonamiento aceptado para hacer demostraciones formales, pero antes de ver qué es, consideremos los siguientes casos:

Caso 1. Estamos dentro de un lugar cerrado y no podemos saber si está o no lloviendo, pero tenemos la siguiente información. Sabemos que siempre que llueve hay nubes y

sabemos también que hay nubes. El argumento lo podemos escribir como:

Premisa	Si llueve hay nubes
Premisa	Hay nubes
Conclusión	?

Caso 2. Un padre le dice a su hijo que si hace la tarea lo lleva al cine. No sabemos si hizo o no la tarea pero en la tarde los vemos en el cine. El argumento quedaría:

Premisa	Si haces la tarea te llevo al cine
Premisa	Los vimos en el cine
Conclusión	?

Si se hace el experimento en un salón de clases o con un grupo de personas, en el primer caso todos contestan que no se sabe pues puede o no llover. Sin embargo en el segundo caso casi todos coinciden en que sí hay conclusión y que se está seguro que hizo la tarea.

Analicemos los casos simbólicamente, en el primer caso **p: llueve q:hay nubes** en el segundo **p: hacer la tarea q:llevarlo al cine**. Las tablas quedan:

	Primer caso		Segundo caso
Premisa	$p \rightarrow q$	Premisa	$p \rightarrow q$
Premisa	q	Premisa	q
Conclusión	?	Conclusión	?

Observamos que en ambos casos es la misma estructura del argumento, por lo que en los dos casos se puede sacar conclusión válida o en ninguno. Pero no es posible que en uno sí y en el otro no.

La respuesta correcta es que en ningún caso se puede obtener conclusión válida.

A continuación se presentan los cuatro casos posibles de argumento con una condicional simple, de los cuales dos tienen conclusión válida y dos no. Como en casi todos los casos, en matemáticas, las propiedades se pueden establecer con implicaciones, este modelo de razonamiento resulta ser central para poder entender matemáticas. Los cuatro casos de Inferencia Deductiva con una Implicación:

	MPP
Premisa	$A \rightarrow C$
Premisa	A
Conclusión	C

Premisa	$A \rightarrow C$
Premisa	C
Conclusión	NO HAY

Premisa	$A \rightarrow C$
Premisa	$\neg A$
Conclusión	NO HAY

Premisa	$A \rightarrow C$
Premisa	$\neg C$
Conclusión	$\neg A$

Notamos que tanto el primero, como el último son argumentos válidos; mientras que en los otros dos no hay conclusión. El primero se llama MPP: Modus Ponendo Ponens y el último MTT: Modus Tollendo Tollens, están en latín y en español MPP podría ser Ley de Afirmando Afirmando o de Poner Poniendo y MTT quedaría Ley de Negar Negando o Quitar Quitando. Sin embargo es costumbre nombrarlos en latín.

Tanto MPP como MTT son reglas de inferencia válidas, en lógica existen varias reglas de inferencia, pero por ahora solamente utilizaremos estas dos.

5.3. Comprobación o justificación

Una comprobación es una justificación formal, informal, geométrica, ilustración, argumento proceso para convencer de que algo está bien. Sin embargo en Lógica y en Matemáticas las únicas comprobaciones aceptadas son las **Demostraciones Formales**.

Una **Demostración** es una secuencia de pasos válidos donde el último paso es la conclusión, cualquiera de los siguientes pasos es válido:

Premisa o Axioma: En cualquier paso se puede usar una premisa, esto es, lo que suponemos válido.

Equivalencias: Cualquier paso puede ser un equivalente de un paso anterior.

Regla de Inferencia: En cualquier paso se puede escribir la conclusión de una regla de inferencia si sus premisas son pasos anteriores.

Propiedades previas: Cualquier teorema o propiedad conocida puede ser usado en un paso, en particular cualquier inferencia válida puede ser utilizada.

5.4. Estrategias de prueba o demostración

Generalmente cuando se quiere comprobar algo, se tienen las condiciones dadas (Antecedente) y lo que se va a comprobar (Conclusión). Por lo que en la mayoría de los casos se debe probar que $A \Rightarrow C$, y la forma de hacerlo es:

5.4.1. Directa

Se toma A como premisa y se demuestra C .

5.4.2. Contrapositiva

Se toma $\neg C$ como premisa y se demuestra $\neg A$

Contradicción o Reducción Al Absurdo

Se toman A y $\neg C$ como premisas y se demuestra algo imposible como $B \wedge \neg B$

5.4.3. Análisis regresivo

Es el método que en computación se conoce como Top-Down, se empieza por la respuesta y se trata de llegar al inicio. Se utiliza generalmente para resolver problemas.

5.4.4. Negación

Es un caso particular del Método exhaustivo, cuando se conocen todos los posibles casos. Si la negación tiene menos casos o es más sencilla se resuelve la negación o se demuestra que la negación es falsa. Este método es muy utilizado por ejemplo en el caso de que se quiere saber la probabilidad de $x > 2$ en una distribución Binomial con $n = 20$, resolvemos los casos 0, 1 y 2 y restamos la suma de 1, en lugar de resolver de 3 a 20.

5.4.5. Método exhaustivo

Hacer la demostración cuando se conocen todos los posibles casos. Demostrando uno por uno. Para practicar este método se pueden resolver rompecabezas numéricos SUDOKU, el juego de Combate Naval o Matrices Binarias.

6. Resolución de Problemas

Quizá la importancia central de las matemáticas radica en la resolución de problemas. En la vida diaria tenemos constantemente situaciones donde debemos utilizar nuestros conocimientos, habilidades, experiencias e ingenio para resolver las dificultades que nos presentan en nuestro trabajo, nuestra casa y en la vida cotidiana. Es de suponer que una persona con mayor preparación va a tener mayor facilidad en la solución de los diferentes problemas que se van presentando. En el trabajo, las empresas buscan personas con mayor habilidad para enfrentar situaciones nuevas.

¿Qué necesito para estar bien preparado y poder enfrentar los problemas? Indiscutiblemente que hay muchas posibilidades y sería imposible saber cómo resolver cualquier situación, pero hay una serie de hechos básicos que si los sabemos nos ponemos en un plano superior para enfrentar los problemas.

Lo primero que debemos de tener en cuenta es que tanto en la vida diaria como en el trabajo o en la escuela debemos de abordar los problemas con un sistema, un esquema estructurado que nos sirvan de apoyo, y que sea una herramienta útil para entender la situación y plantear una posible respuesta. Aquí abordaremos problemas específicos que se pueden resolver con álgebra, pero esto puede servir para cualquier clase de problemas.

COMPETENCIA DE LA UNIDAD

Conoce y aplica los modelos en la resolución de problemas.

COMPETENCIAS ESPECÍFICAS

Conoce modelos para la solución de problemas. Resuelve problemas de movimiento con velocidad constante. Resuelve problemas de mezclas. Resuelve problemas geométricos.

ACTIVIDADES

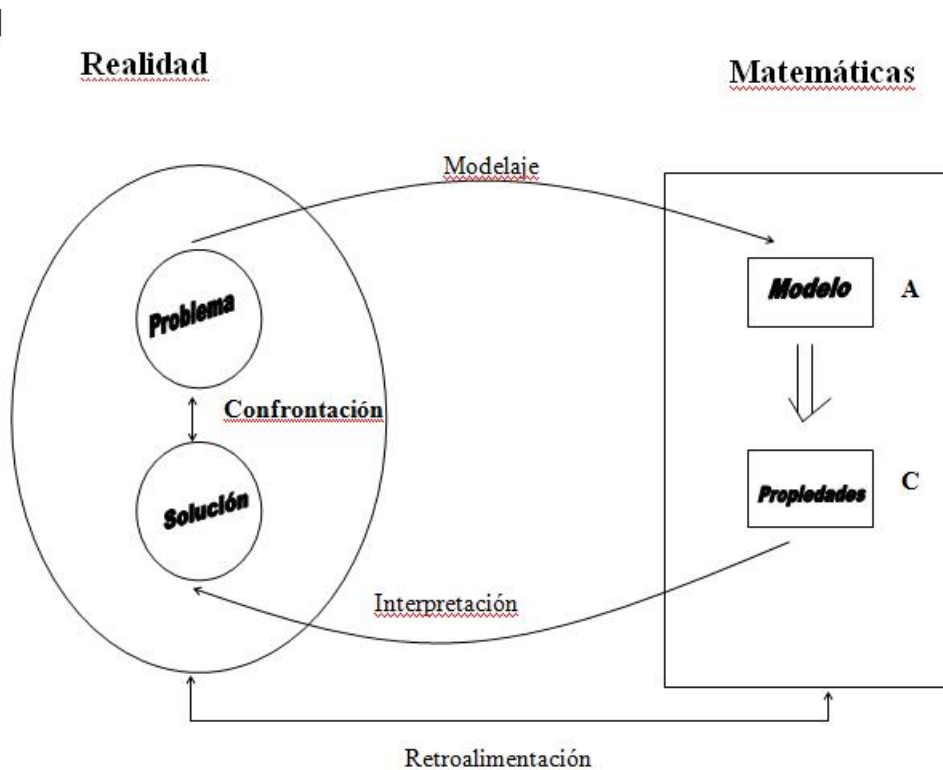
Dibujar el diagrama A-L en una cartulina. Resolver problemas de movimiento utilizando la tabla para dos móviles. Utilizar el Diagrama de Mezclas para la resolución de problemas. Prácticas por equipos. Elaborar resumen en el *site* con análisis y reflexiones.

EVALUACIÓN

Examen escrito. Revisión del *Site*.

6.1. Diagramas y modelos

La solución de problemas siempre está conectada con el mundo real. En este tema veremos como utilizar las matemáticas para resolver problemas. Primero consideremos el **Diagrama A-L**.



En el mundo real se tiene una situación o **Problema**, una tarea importante es el proceso de crear un modelo matemático asociado a esa realidad. Una vez que tengo el modelo matemático del problema **A**, utilizamos propiedades matemáticas para obtener una conclusión **C**, y esa conclusión la interpretamos en el mundo real para proponer una **Solución**. Si la solución encontrada no es adecuada para nuestro problema nos regresamos a revisar la interpretación de las conclusiones matemáticas **C**, o los procesos para obtenerlas y finalmente al modelo **A**, y repetimos los pasos necesarios para dar otra solución.

Para poder llevar a cabo el la resolución de problemas hay muchos modelos, uno muy conocido es el de George Polya.

2. Modelo de Polya

George Polya (1988-1985) Nació en Hungría. Cursó sus estudios en las universidades de Budapest, Viena, Göttingen y Paris. Fue profesor de matemáticas en la Universidad de Stanford. Las investigaciones y su agradable personalidad le granjearon un lugar de honor no sólo entre los matemáticos, sino también entre los estudiantes y los maestros. Sus descubrimiento abarcaron una variedad impresionante: análisis de variable real y compleja, probabilidad, análisis combinatorio, teoría de números y geometría. El libro *How to Solve It* se ha traducido a 15 idiomas.

"Un gran descubrimiento resuelve un gran problema, pero en la solución de cualquier problema hay una pizca de descubrimiento. Tu problema puede ser modesto, pero si es un reto para tu curiosidad y hace que entren en juego tus facultades de inventiva, y si lo resuelves con tus propios medios, experimentarás la tensión y gozarás el triunfo del descubrimiento." –George Polya.

Proceso para la resolución de problemas:

1. Entienda el problema. Usted no puede resolver un problema si no entiende lo que se pide encontrar. El problema debe ser leído y analizado cuidadosamente. Es probable

que necesite leerlo varias veces. Después de que así lo haya hecho, pregúntese: “¿Qué debo encontrar?”.

2. Formule un plan. Hay muchas formas de atacar un problema y decidir qué plan es apropiado.

3. Lleve a cabo el plan. Una vez que sepa cómo enfocar el problema, realice su plan. Usted puede correr hacia un “callejón sin salida” o por caminos con obstáculos imprevistos, pero sea persistente. Si es capaz de resolver un problema sin ningún esfuerzo, entonces esto no tiene mucho de problema, ¿o sí?

4. Revise y compruebe. Compruebe su respuesta para ver que ésta sea razonable. ¿Satisface las condiciones del problema? ¿Ha respondido usted a todas las preguntas que se hacen en el problema? ¿Puede resolver el problema en una forma diferente y alcanzar la misma respuesta?

Ejercicios.

- Investigar lo que es Heurística.
- Investigar otros modelos para la solución de problemas, por ejemplo el de James Stewart o el de Serway.
- Leer las notas complementarias y esquematizar el modelo de Dewey y el de Polya.

6.2. Movimiento lineal con velocidad constante

Consideraremos movimiento rectilíneo con velocidad constante, elementos que intervienen; d : distancia v : velocidad t : tiempo. Consideremos dos móviles y es conveniente hacer la siguiente tabla.

	d	v	t
Movil 1			
Movil 2			

Ejemplo 1. Una tortuga avanza a una velocidad constante de 2 km/h, un día después sale Aquiles a 20 km/h. ¿Cuánto tarda en alcanzarla?

Primero vemos que los dos van a recorrer la misma distancia cuando Aquiles alcance a la tortuga (si es que la alcanza); por lo que ponemos x en la tabla para la columna de la distancia para Aquiles y para la Tortuga. Después anotamos sus velocidades y finalmente si Aquiles hace un tiempo t , la tortuga hará 24 horas más pues salió un día antes.

	d	v	t
Aquiles	x	20	t
Tortuga	x	2	$t+24$

Una vez que tenemos la tabla utilizamos la fórmula: $d = vt$ por lo que obtenemos $x = 20t$ y $x = 2(t + 24)$. Como las dos ecuaciones tienen x del lado izquierdo tenemos $20t = 2(t + 24) \Rightarrow 20t = 2t + 48 \Rightarrow 18t = 48 \Rightarrow t = \frac{48}{18} = \frac{8}{3}$

O sea que Aquiles alcanza a la tortuga en 2 horas con 40 min.

Ejemplo 2. La misma tortuga del ejemplo anterior está a 110 km de Maratón, donde se encuentra Aquiles. Si los dos salen al mismo tiempo, uno hacia el otro, con las mismas velocidades del ejemplo anterior, ¿cuánto tardan en encontrarse?

Ahora sabemos que el tiempo es el mismo, y sabemos sus velocidades, pero la distancia es diferente. Si Aquiles recorre una distancia x la tortuga recorrerá $110 - x$, y la tabla queda.

	d	v	t
Aquiles	x	20	t
Tortuga	110-x	2	t

Con la misma fórmula anterior obtenemos $x = 20t$ y $110 - x = 2t$. En este caso resolvemos la segunda ecuación para x , y tenemos $x = 110 - 2t$. De nuevo igualamos los valores de x y tenemos:

$$20t = 110 - 2t \Rightarrow 20t + 2t = 110 \Rightarrow 22t = 110 \Rightarrow t = \frac{110}{22} = 5$$

Por lo que Aquiles se encontrará con la tortuga en exactamente 5 horas.

Ejercicios.

1. Un corredor entrena a una velocidad constante de 12 km/h, en una pista de 400m. Después de 2 vueltas un segundo corredor sale a una velocidad de 16 km/h. ¿cuánto tardará en alcanzarlo? ¿en qué vuelta?

2. Dos ciudades están a 240 km de distancia. Un automóvil sale de la primera ciudad a 105 km/h, al mismo tiempo sale otro de la segunda ciudad a 80 km/h. ¿A qué hora se encuentran?

3. Para realizar un viaje Juan y Pedro salen de Tijuana en diferentes automóviles, Juan que iba a 90 km/h se detiene primero y espera media hora a Pedro quien iba a 80 km/h. A que distancia se detuvo Juan a esperar a Pedro.

4. Un esquiador sube en telesilla a 5 km/h. ¿A qué velocidad tendrá que descender esquiando para conseguir una velocidad de 10 km/h. en el recorrido total?

5. Un vendedor va a ver a un cliente que se encuentra a varios kilómetros de distancia y lleva una velocidad media de 90 km/h, de regreso ya relajado como tuvo éxito regresa con mucha calma a 70 km/h. ¿Cuál es la velocidad promedio del viaje completo?

6.3. Mezclas

Otro tipo de problemas muy común que podemos resolver utilizando ecuaciones de primer grado es el de Mezclas. Veamos el siguiente modelo.

Modelo de Mezclas

Para un problema de mezclas, podemos utilizar el siguiente esquema.

1er. %	+	2o. %	=	% Final
X		T-X		T

Primera concentración con cantidad **X**

Segunda concentración con cantidad **T - X**

Del lado derecho el porcentaje deseado y la cantidad total **T**

Nota: El manejo de las variables puede cambiar, por ejemplo podría ser **C, X y C+X** si se conoce la cantidad de la primera concentración.

Con los datos en este modelo obtenemos la ecuación:

$$(1er. \%) * x + (2o. \%) * (T - x) = (\%Final) * T$$

Ejemplo 1. Se quieren 5 litros de alcohol al 12% mezclando alcohol al 16% con otro al 10%. ¿Cuánto se debe de poner de cada uno?

La cantidad del alcohol al 16% le llamamos x , por lo que el alcohol al 10% será $5-x$, y obtenemos la tabla:

Tipo 1		Tipo 2		Final
16%	+	10%	=	12%
x		$5-x$		5

Por lo tanto la ecuación es:

$$.16x + .1(5 - x) = (.12) * 5 \Rightarrow 16x + 10(5 - x) = 12 * 5 \Rightarrow 16x + 50 - 10x = 60 \Rightarrow 6x = 10 \Rightarrow x = \frac{5}{3}$$

Por lo tanto se necesitan $\frac{5}{3}$ l de alcohol al 16% y $\frac{10}{3}$ l de alcohol al 10% para hacer la mezcla.

Ejemplo 2. Una persona tiene 36 monedas de \$ 5.00 y de \$ 2.00, si en total tiene 129 pesos. ¿Cuántas monedas tiene de cada una?

Primeramente, como no sabemos cuántas monedas son de \$5.00, le llamamos x , en este caso $T=36$ que es el total de monedas. El primer porcentaje es en realidad una cantidad: 5 y el segundo 2. En este caso no hay porcentaje final, pues sabemos el resultado de $(\%Final)*T$ que es 129.

Tipo 1		Tipo 2		Final
5	+	2	=	No hay
x		$36-x$		36

Por lo tanto la ecuación es:

$$5x + 2(36 - x) = 129 \Rightarrow 5x + 72 - 2x = 129 \Rightarrow 3x = 57 \Rightarrow x = 19$$

por lo tanto hay 19 monedas de \$ 5.00 y 17 de \$ 2.00.

Ejercicios.

1. Una persona invirtió \$ 1,000.00 en dos partes, una al 6% y otra al 9%. Si en total obtuvo \$ 85.00 de intereses, ¿cuánto dinero invirtió en cada una de ellas?

Referencias

Referencias

- [1] Bishop, A. J. (1999) *Enculturación matemática: La educación matemática desde una perspectiva cultural*. Paidós 8
- [2] Marzano, R. J.; Pickering, D. J. (2005) *Dimensiones del aprendizaje: manual del maestro (2/e)*. ITESO 6
- [3] Mason, J. et al. (1985) *Thinking Mathematically*, Revised Edition. Addison-Wesley 6, 7
- [4] *Calculus Readiness Assessment Topics*.
<http://www.math.sfu.ca/ugrad/calctest/calctopics.shtml>. Acceso mayo 10, 2010. 5, 8
- [5] Williams, G. (2003) *Student Inclination to work with unfamiliar challenging problems: the role of resilience*. University of Melbourne.
<http://extranet.edfac.unimelb.edu.au/DSME/lps/assets/MAV2003williamsg.pdf>. Acceso mayo 29, 2010. 9
- [6] GeoGebra. *Software libre de matemáticas para educación*. <http://www.geogebra.org/cms/>. Acceso agosto 16, 2010. 10
- [7] *Introducción a GeoGebra*. http://www.geogebra.at/help/geogebraquickstart_es.pdf. Acceso agosto 16, 2010. 13

Índice alfabético

Deducción, 53

demostración, 55

Dominio, 24

ecuaciones cuadráticas, 36

ecuaciones lineales, 35

Exponencial, 50

Factorización, 30

Fracciones, 32

Funciones, 24

funciones trigonométricas, 50

GeoGebra, 10

gráfica, 38

Graficación, 9

igualdad, 34

Inferencia, 52

Mezclas, 60

operaciones algebraicas, 26

Rango, 24

resolución de problemas, 57